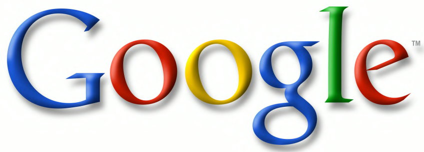
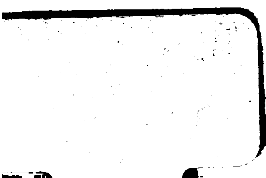



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909169 6





OFO

[illegible]

Grundriß der allgemeinen Arithmetik oder Analysis

zum Gebrauch
bey academischen Vorlesungen

entworfen
von

B. F. Thibaut
Hofr. und Prof. der Mathematik in Göttingen.



Zweyte, neu bearbeitete Auflage.

Erster Theil.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1830.

Vorrede
zur ersten Auflage.

Obschon es zunächst das lange empfundene Bedürfniß für die eigenen Vorlesungen gewesen ist, was den Verfasser zur Abfassung des gegenwärtigen Compendiums der allgemeinen Arithmetik bewogen hat, so hält er sich dennoch für berechtigt zu glauben, daß eine solche Arbeit für den jetzigen Zustand der Wissenschaft von wesentlichem Nutzen ist. Die älteren Lehrbücher lassen, in Absicht auf wahrhaft analytischen Geist, und Tiefe der Untersuchungen, Vieles zu wünschen übrig, abgesehn von dem

gänzlichen Mangel combinatorischer Begriffe, die eines der wichtigsten Fundamente für die Analysis bilden. Die großen Mathematiker, denen wir ausführliche Werke über die höchsten Theile der Mathematik verdanken, haben sich mit dem wichtigsten unter allen, welcher den Uebergang von den Elementen zu jenen vermittelt, fast gar nicht beschäfftigt. Und so ist in der Darstellung dieser Wissenschaft eine Lücke entstanden, die der Verbreitung ihrer Studiums nicht anders als sehr gefährlich werden konnte.

Der Verfasser hat das Glück gehabt, durch eine sehr ausgebreitete, und ununterbrochen fortgesetzte, Erfahrung zu lernen, was zu einem Vortrage der Mathematik, welcher sich von den ersten Anfangsgründen bis zu den höchsten Theilen erstreckt, erforderlich ist. In so fern hofft er die Form seiner Darstellung, welche in vielen Stücken von der gewöhnlichen abweichend seyn mag, in gewissem Sinne als gerechtfertigt annehmen zu dürfen. Daß es ihm angelegen gewesen sey, die Analysis von allen fremdartigen Principien zu reinigen; die Methode

der Wissenschaft zu vereinfachen, und zur Deutlichkeit zu erheben; die Idee des Ganzen nicht über einzelnen Theilen aus den Augen zu lassen; bedeutende Lücken auszufüllen: wird der Inhalt des Buchs beweisen. Bey der gänzlichen Regellosigkeit, welche im Vortrage der Mathematik herrscht, die indessen dem Kenner durch pedantische Formen und Kunstgriffe nicht verhüllt bleiben kann, mag ein solches Streben Manchem überflüssig, Einigen thöricht scheinen; wer mit freyem Geiste über der Wissenschaft schwebt, wird es, mehr oder weniger gelungen, nicht verschmähn.

Die neuere Bearbeitung der Combinationslehre ist allenthalben, wo es Natur des Gegenstandes forderte oder zuließ, benutzt worden. Aber die Terminologie und Bezeichnung der um diesen Zweig der Wissenschaft so sehr verdienten Hindenburgischen Schule ist dabey fast gar nicht angewendet worden. Selbst ein großer Theil der Lehren, welche dort als wesentlich aufgestellt werden, hat hier keinen Platz gefunden. Es wäre eine sehr interessante Aufgabe: den wahren analytischen Werth der

Combinationslehre zu würdigen, und die Grenzen festzusetzen, wo sie sich auf ihr eignes Gebiet beschränken sollte; ihre Beantwortung gehört aber nicht an diese Stelle, und vielleicht ist es der Zeit vorbehalten, sie stillschweigend zu geben.

Im Jan. 1809.

Vorrede
zur zweyten Auflage.

Man wird es sehr natürlich finden, wenn bey der, nach langem Zeitraum erfolgenden, neuen Ausgabe eines von dem Verfasser ununterbrochen als Grundlage seiner Vorlesungen benutzten Lehrbuchs, dasselbe großentheils neu bearbeitet erscheint, ungeachtet der wesentliche Inhalt, der Geist und die Methode der darin enthaltenen wissenschaftlichen Betrachtung, keine Aenderung erhalten haben.

Strengere Ordnung, Entfernung von Darstellungen und Beweisen, die als seltene Kunstgriffe erscheinen könnten; Verallgemeinerung der Grundlehren, und weitere Ausführung derselben, dürften wohl als Verbesserungen, wodurch die neue Bearbeitung sich auszuzeichnen gestrebt hat, bemerklich gemacht werden.

Um nur Einiges dieser Art anzuführen, so mögte der hier zum ersten Male gegebene Beweis des binomi-

schen Satzes, sofern er als Formel der Wurzel-Ausziehung gelten soll, unmittelbar aus dem Begriffe der Wurzel-Ausziehung, als einer Umkehrung des Potenziirens, abgeleitet, wissenschaftlich auf einer viel höheren Stufe stehn, als der früher geführte, und alle, welche, wie er, den glücklichen Gedanken von der Möglichkeit einer Erweiterung der einfachsten Form jenes Satzes, als einmal aufgefaßt annehmen, und nur zu bestätigen bestrebt sind; sey es auch, daß die Darstellung auf solchem Wege sich sehr kurz zusammenziehn läßt. Aehnliches ist in der Theorie der Potenzen mehrfach geleistet.

Die frühere Ausgabe des vorliegenden Grundrisses darf auf das Verdienst Anspruch machen, zuerst die Theorie der Potenzensysteme, hauptsächlich die des imaginären natürlichen, auf ihre eigentlichen rein analytischen Quellen zurückgeführt, und dadurch die Allgemeinheit der Grundregeln für die Rechnungen mit Logarithmen wissenschaftlich begründet zu haben. Um so angenehmer ist es dem Verfasser gewesen, dieselben Lehren, der Hauptsache nach, in den neuesten Schriften eines geistreichen französischen Mathematikers, obschon nicht in strengem Zusammenhange mit ihrer eigentlichen wissenschaftlichen Begründung, anzutreffen, und wahrzunehmen, daß sie seitdem, wie es ihre Wichtigkeit verdient, angefangen, auch in gewöhnliche Lehrbücher überzugehn. Mögte es nur immer auf eine gründliche und wahrhaft analytische Weise geschehn, so daß dabey die Arithmetik in keinem Sinne von der Geometrie zu borgen, zu lernen, oder Bestätigung ihrer Lehren zu erlangen herabgewürdigt würde, welches, selbst wenn die, bis

jetzt auf dem Glauben ruhende, prästabilirte Harmonie zwischen Arithmetik und Geometrie wissenschaftliche Begründung erlangt hätte, ein nicht genügendes Verfahren seyn würde.

Mehr als eine Erweiterung hat diese Theorie der Potenzensysteme in der vorliegenden neuen Ausgabe erhalten. Die Convergenz der dabey hervortretenden Entwicklungsformen ist genauer, durch Hülfe ausdrücklich zu diesem Zwecke vorangeschickter Principien, nachgewiesen; die allgemeinen Regeln der numerischen Logarithmen-Rechnung sind vollständiger articulirt; die Vieldeutigkeit der Radical-Größen ist in ihrem ganzen Umfange erörtert, und besonders sind die Fundamental-Regeln der Potenzenrechnung zu einer höheren Bedeutung erhoben, indem ihre Gültigkeit auch für Potenzen, die geeignet sind, als vieldeutige Größen angesehn zu werden, durch strenge Beweise dargethan worden ist.

Dagegen hat das Streben nach strenger Ordnung es nothwendig gemacht, aus dem ersten Fundamental-Abschnitt der allgemeinen Arithmetik, welcher lediglich den arithmetischen Operationen an Formen, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, gewidmet ist, die Theorie der Gleichungen höherer Grade ganz wegzulassen. Sie setzt, wenn sie gründlich gegeben werden soll, den Inhalt dieses Fundamental-Abschnitts, namentlich den Calcul der imaginären Grundformen, voraus. Hier, wie allenthalben, herrschen im üblichen Vortrage der Analysis meistens die höchsten Verwirrungen. Es heißt gewiß nicht in natürlicher Ordnung der Begriffe

fortschreiten, wenn man den Beweis des Satzes: daß Wurzelausziehungen aus bestimmten Zahlen vieldeutige Operationen sind, von dem Theorem: daß jede Gleichung so viele Wurzeln haben müsse, als die Zahl ihres Grades Einheiten in sich schließt, abhängig macht.

Da das vorliegende Lehrbuch auch von Manchen zum eigenen Studium gebraucht wird, so ist ein Anhang von Beyspielen, wobey zugleich weitere Ausführung der Mechanismen, auf welche die aus der Theorie hervorgehenden allgemeineren Normen zurückgebracht werden können, gegeben wird, als eine nicht unzweckmäßige Zugabe beygefügt worden.

Die Theorie der Radical-Größen durch genauere Ausführung zu erläutern, und zugleich die Fundamente von Untersuchungen, die bey weiterem Fortschreiten der Analysis sich wichtig zu machen nicht verfehlen können, zu legen, ist der letzte, gleichfalls neu hinzugekommene, Anhang bestimmt.

Im Jan. 1830.

Inhalts-Anzeige.

Erstes Kapitel.

Ueber die Grundform und Fundamentalaufgabe der allgemeinen Arithmetik.

Die Wissenschaft der Zahlen, welche Verknüpfungen mehrerer Zahlen unter einander, und Beziehungen, die aus solchen Verknüpfungen erwachsen, zum Gegenstande hat, ist von unabsehbarem Umfang; die gewöhnliche Elementar-Arithmetik macht von ihr nur einen kleinen, obgleich sehr wichtigen Theil aus. Erst dann, wenn man die möglichen Arten einfacher Zahlen, und die ursprünglichen Verknüpfungen, welche sie mit einander eingehen können, kennen gelernt hat, ist man im Stande, die Idee zusammengesetzter Zahlen zu bilden, den Gesetzen der unter ihnen möglichen Verbindungen nachzuforschen, und die daraus entspringenden Beziehungen zu entwickeln. So steht mit Recht die Lehre von den vier Species, und den Gleichungen des ersten Grades, an der Spitze der ganzen Zahlenwissenschaft, und es wäre vielleicht, wenn man eine bestimmte Grenze ziehen wollte, am zweckmäßigsten, die Elementar-Arithmetik auf sie zu beschränken. Dem eingeführten Gebrauche gemäß zieht man indessen noch einen Abschnitt in das Gebiet der Elemente hinüber, welcher gewissermaßen den Uebergang zu den höheren Untersuchungen vermittelt. Die am wenigsten verwickelte Form zusammengesetzter Zahlen ist die eines Products aus gleichen Factoren, oder einer Potenz. Die Betrachtung dieser Form; ihre Zusammensetzung; die Gesetze der Verbindung einzelner von derselben Art, machen den zweyten Theil der elementarischen

Arithmetik aus. Und dadurch bereitet sich die Grundlage der ferneren Untersuchung, denn die Form der Potenz ist es gerade, welche das Hauptelement bey der Bildung der zusammengesetzten Zahlenformen abgibt, die, obschon an sich willkührlich gewählt, wegen ihrer vorzüglichen Brauchbarkeit zu Größenbestimmungen, zum ersten Hauptgegenstande der allgemeinen Arithmetik gemacht werden.

Schon unsre gewöhnlichen decadisch gebildeten Zahlen geben ein Beyspiel und Vorbild solcher Zusammensetzungen. So wie bey ihrer Erzeugung eine gewisse willkührliche Zahl, die man Grundzahl zu nennen pflegt, erwählt wird, um ihre successiven Potenzen als verschiedene Einheiten anzusehen, die in besonderen Theilen eines Aggregats gezählt werden, so nimt man, um die Grundform der Analysis zu bilden, eine Größe, die aber völlig unbestimmt bleibt, an, um successive Potenzen von ihr als Dinge zu betrachten, von denen in einzelnen verschiedenen Theilen eines eben dadurch entstehenden zusammengesetzten Ausdrucks Mengen vorkommen. Wir wollen diese Größe die Hauptgröße nennen, und durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets andeuten. So wie ferner bey der Bildung decadischer Zahlen die Mengen, welche von jeder Art jener Einheiten etwa vorhanden sind, besonders angegeben, und durch die einzelnen Ziffern dargestellt werden, so fügt man auch hier den successiven Potenzen der Hauptgröße beliebige Factoren bey, die den Namen der Coeffizienten erhalten, und durch Buchstaben des Alphabets angedeutet werden, wiewohl es in speciellen Fällen auch gestattet ist, bestimmte Zahlen dafür an die Stelle zu setzen. Die einzelnen, so zusammengesetzten Producte, werden als Theile zu einem Ganzen vereint gedacht, und dem gemäß beym Schreiben durch + Zeichen verbunden. In der Folge dieser einzelnen Theile, oder Glieder, beobachtet man den Rang der in ihnen enthaltenen Potenzen, wobey man aber nach Belieben von der höchsten an-

fangen, und so allmälig zu den niedrigern fortgehn, oder auch die umgekehrte Ordnung eintreten lassen kann. Das erste gibt die fallende, das zweyte die steigende Anordnung einer solchen Form, und es ist eine stillschweigende Bedingung bey der Behandlung derselben, daß sie entweder auf die ein oder die andere Art geordnet werden sollen.

Im Anfange läßt man die Potenzen der Hauptgröße nur ganze und positive Zahlen zu Exponenten haben, so daß, x als Zeichen der Hauptgröße, A, B, C u. s. w. als Andeutung beliebig zu wählender Coeffizienten, die auch den Werth o gestattet, angenommen, und unter n irgend eine positive ganze Zahl verstanden,

entweder $A + Bx + Cx^2 \ldots + Ox^n$

oder $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + O$

das Schema der zu bearbeitenden Grundform abgibt. Eine strengere Bezeichnung pflegt sämmtliche Coeffizienten mit demselben Buchstaben anzudeuten, ihre Verschiedenheit durch übergesetzte Indices bemerklich zu machen, wo also jene beyden Formen durch:

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots\ldots + \overset{n}{a}x^n$$

oder: $\overset{0}{a}x^n + \overset{1}{a}x^{n-1} + \overset{2}{a}x^{n-2} \ldots + \overset{n}{a}$ sich darstellen würden. Man pflegt einer solchen Form denselben Rang beyzulegen, welchen die höchste in ihr vorkommende Potenz der Hauptgröße besitzt, ohne Rücksicht auf ihre übrigen, niedrigere Potenzen enthaltende Glieder.

In der Folge erweitert sich das Gesetz der Grundform dahin, daß auch negative und gebrochene Zahlen als Exponenten der Potenzen in ihren successiven Gliedern vorkommen dürfen. Diese Erweiterung zeigt sich sehr bald als nothwendig. Die Fundamentalaufgabe der Analysis ist nemlich die: man soll mit Formen, die nach den eben angeführten Gesetzen gebaut sind, rechnen, so daß das Resultat der Rechnung als eine, dem nemlichen Gesetze unterworfene Form herauskomme. In-

dem man dieses, den Regeln der arithmetischen Operationen gemäß, zu leisten sucht, gehen von selbst, wenn sie auch in den ersten Formen, die den anhebenden Rechnungen zum Grunde gelegt wurden, gar nicht vorhanden waren, in vielen Fällen Potenzen der Hauptgröße mit negativen oder gebrochenen Exponenten hervor, so daß man jedem Resultate entsagen müßte, wenn eine Form, in der solche enthalten sind, nicht eben so gut als andre gestattet seyn sollte. Dabey bleibt übrigens dieselbe Regel der Anordnung, und es ist unmittelbare Folge von dem, was vorher über die Rangordnung der einzelnen Glieder festgesetzt war, daß Potenzen mit negativen Exponenten für niedriger im Range angesehen werden müssen, als solche, die positive Exponenten enthalten, und zwar um desto niedriger, je größer der negative Exponent ist.

In sofern nun, als Ausdrücke einer solchen erweiterten Gestalt hervortreten, und selbst wieder in fernere Rechnungen verflochten werden können, ist es allerdings nothwendig, alle Regeln der arithmetischen Operationen auch auf sie zu erstrecken. Es genügt für die wesentlichen Zwecke der Analysis, als allgemeinstes Schema, eine nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitende Form, so daß die successiven Exponenten dieser Potenzen irgend eine arithmetische Progression bilden, anzunehmen. In Zeichen ausgedrückt: bedeuten α und δ beliebig zu wählende positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen, so ist das allgemeinste Schema der Grundform, steigende und fallende Anordnung zugleich unter sich enthaltend:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots$$

Zusammengesetzte Ausdrücke einer solchen Gestalt sind es nun, welche wir allmälig den arithmetischen Operationen, deren Begriffe und Grundregeln, die Elementar-Arithmetik bereits entwickelt hat, zu unterwerfen beabsichtigen.

Es ist aber auf den ersten vorläufigen Blick klar, daß Verknüpfungen zusammengesetzter Größen nur durch partielle,

allmälig zu bildende Verbindungen der Elemente, woraus sie sich erzeugt haben, möglich sind, und daß dabey auf die Ordnung, welche im Zusammenstellen jener Elemente zu den erforderlichen partiellen Verbindungen beobachtet wird, sehr Vieles ankommt. Insofern bedarf die allgemeine Arithmetik, als unentbehrlich zu ihrer vollständigen Grundlage gehörig, deutlicher Begriffe von Ordnungen und Folgen, die im Zusammenstellen gegebener Dinge stattfinden können, und nur durch Zuziehung von solchen lassen sich ihre Aufgaben mit befriedigender Vollständigkeit erledigen.

Zweytes Kapitel.

Erste Grundzüge der Combinationslehre.

Die Combinationslehre ist die Wissenschaft der Ordnung, welche bey Zusammenstellungen und Folgen gegebener Dinge beobachtet werden kann.

Die einzelnen Dinge, auf deren Größe oder sonstige Beschaffenheit es dabey durchaus nicht ankommt, werden auf die allgemeinste Art dadurch bezeichnet daß man ihnen Numern auflegt, indem sie gegeben werden, und diese ihre Numern zu stellvertretenden Zeichen für sie selbst macht. In manchen Fällen, ist es zweckmäßig, für jedes Element welches einem Inbegriffe angehört, im Allgemeinen dasselbe Zeichen, irgend einen Buchstaben z. E. a einzuführen, und alsdann durch zugefügte Numern (die wohl am schicklichsten über den Buchstaben zu setzen seyn möchten) die einzelnen Elemente anzudeuten, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$ u. s. w. Meistens aber, und im Allgemeinen, ist es am besten, bloß die Numern selbst, 1, 2, 3, u. s. w. als Andeutungen der Elemente zu gebrauchen. Man bedient sich auch wohl statt ihrer andrer Zeichen, bey denen man schon gewohnt ist, eine unabänderliche Folge zu beobachten, z. E.

der Buchstaben, indessen ist eine solche Bezeichnung weder wissenschaftlich noch allgemein. Sollten unter den gegebenen Dingen mehrere seyn, die bey der Zusammengesellung für identisch gelten müßten, so daß der gegenseitige Austausch derselben keine Aenderung hervorbringen könnte, so wird man bey der anfänglichen Bezeichnung jedes von ihnen durch die nemliche Numer andeuten, und diese so oft aufführen, als solche identische Dinge in der Reihe der gegebenen vorhanden sind.

In sehr vielen Fällen wird man unbedenklich das erste in der Reihe der gegebenen Elemente so fort mit 1, das zweyte mit 2, u. s. w. numeriren dürfen. Oft indessen können Gründe vorhanden seyn, das Numeriren nicht gerade mit 1 anheben zu lassen. Die Analysis namentlich hat meistens Ursache, bey ihren Ausdrücken die Anfangsglieder von den folgenden zu unterscheiden, und die Zahl der letztern dadurch auszudrücken, daß angegeben wird, die wie vielsten nach ihrem Anfangsgliede sie sind. In solchem Fall wird 0 die Numer des Anfangsgliedes, 1 die des ersten nach ihm u. s. w. werden müssen. Und im Allgemeinen wird überhaupt gestattet seyn, wenn die gegebenen Elemente, ihrer Natur gemäß, successiv verschiedenen Rängen angehören, die Indices dieser Ränge als stellvertretende Zeichen für sie selbst zu brauchen.

Eben so unbestimmt muß auch der Begriff der Zusammengesellung jener Elemente gefasst werden. Ob eine würkliche Verknüpfung unter ihnen getroffen werden soll, und von welcher Art sie seyn wird, davon abstrahirt man gänzlich; das unmittelbare Folgen der einzelnen Elemente nach einander, welchem ein Nebeneinander-Setzen derselben beym Schreiben entspricht, gilt als das Zeichen ihrer combinatorischen Verbindung. Der Inbegriff mehrerer zusammengestellter Elemente wird **Form** oder **Complexion** genannt.

Bey jeder combinatorischen Operation gehen aus den gegebenen Elementen mehrere Formen hervor, welche eine nach

der andern angegeben werden müssen. Nimmt man nur eine Reihe gegebener Elemente an, so lassen sich in Beziehung auf sie nur zwey Arten ursprünglicher Zusammenstellungen denken. Entweder treten alle Elemente zugleich in die Form ein, und dann kann es bloß Aenderung ihrer gegenseitigen Folge seyn, wodurch sich die eine Zusammenstellung von der anderen unterscheidet; oder es sollen jedesmal nur einige von jenen Elementen zusammengefaßt werden, und alsdann läßt sich, ohne Rücksicht auf die Folge der einzelnen Elemente, bloß dadurch eine Unterscheidung der Formen machen, daß die eine nicht durchaus dieselben Elemente enthalten darf, als die andre. Das vollständige Aufsuchen aller Formen bey der ersten Voraussetzung wird **Permutiren** genannt; bey der zweyten **Combiniren** im weiterem Sinn. Eine Verbindung von beyden Operationen, wo man erst combinirt, und hernach jede Form permutirt, welche man gemeiniglich als eine dritte einfache combinatorische Operation unter dem Namen des **Variirens** aufzuführen pflegt, ist offenbar schon abgeleitet, und kann höchstens als eine zusammengesetzte betrachtet werden.

Es sey indessen eine solche Operation einfach oder nicht, so müssen allemal feste Regeln gefunden werden, nach denen sich alle möglichen Formen, mit Ausschluß jeder überflüssigen, darstellen lassen. Diese Regeln können nur auf einer bestimmten Ordnung beruhen, in welcher man allmälig die Elemente in die einzelnen Formen zusammenfügt. Und diese Ordnung wird ohne Zweifel die vollkommenste seyn, wenn selbst die einzelnen Formen, welche bey der Operation allmälig hervorgehn, in Absicht auf ihre Folge, eine in sich selbst erkennbare Gesetzmäßigkeit beobachten. So wie es unter den einzelnen Elementen einen Rang gibt, und sich **frühere** oder **niedrigere**, von **späteren** oder **höheren** von selbst unterscheiden, eben so, und aus dem nemlichen Grunde gibt es auch einen Rang unter den Complexionen, welche sich durch ihre Zusammenstellung erzeugen. Eine Verbindung wird unfehlbar die niedrigste

heissen müssen; wenn man die niedrigsten Elemente, welche man in seiner Gewalt hat, so lange setzt, als man kann; bey der Vergleichung zweyer Formen wird man also diejenige höher nennen müssen, in welcher, früher als in der andern, ein höheres Element gesetzt worden ist, und es bedarf nur dieser Annahme, um allen Formen, die sich aus gegebenen Elementen gebildet haben, ihre Folge nach einander anzuweisen. Man kann indessen, wenn unter solchen Formen mehrere vorhanden sind, die sich durch die Anzahl der überhaupt in ihnen enthaltenen Elemente unterscheiden, oder zu verschiedenen Classen gehören, diesen Umstand zu einem vorläufigen Unterscheidungsgrunde machen, und ihm gemäß die Art, wie die successiven Stellen jeder Form besetzt sind, alsdann erst zu ihrer ferneren Anordnung benutzen, wenn man sie schon vorher so gesondert hat, daß die, welche zu einer niedrigern Classe gehören, früher, als die übrigen, zur Betrachtung gezogen werden. Die Anordnung mehrere Formen, wobey man schlechthin nur darauf sieht, ob sich früher oder später bey der Besetzung gleichhoher Stellen ein Unterschied zeigt, und ob derselbe da, wo er Statt findet, mehr oder minder beträchtlich ist, pflegt die lexicographische genannt zu werden; sollen aber, ehe sie angewendet wird, erst die Formen, nach der Menge von Elementen, die in ihnen liegen, in verschiedene Classen gestellt werden, so pflegt sie die arithmographische zu heissen. Beyde Benennungen sind freylich nur von einzelnen Beyspielen hergenommen. Für Formen, die alle zu derselben Classe gehören, fallen lexicographische und arithmographische Anordnung zusammen. Diesen Erklärungen gemäß wird das Ordnen einer gegebenen Menge von Formen sich folgendermaßen vollziehn lassen. Man werfe alle Formen, die das nemliche Anfangselement haben, in eine Gruppe zusammen, und lasse diese Gruppen nach dem Range der Anfangselemente auf einander folgen. In jeder von ihnen sondre man wieder diejenigen ab und zusammen, welche in der zweyten Stelle gleiche

Elemente haben, und lasse diese kleineren Gruppen nach dem Range der in ihren zweyten Stellen befindlichen Elemente sich nach einander reihen. Und auf diese Weise schreite man fort, Formen, die bis zu einer gewissen Stelle hinauf lauter gleiche Elemente befassen, nach der Verschiedenheit derjenigen, welche in ihnen die nächstniedrigere Stelle einnehmen, aneinanderzureihen. Man wird endlich dabey bis auf die lezten Stellen kommen, und alsdann nehmen die Formen ihre unabänderliche Ordnung nach der Höhe des Elements an, welches die lezte Stelle besetzt. Soll lexicographisch geordnet werden, so setzt man sogleich, ohne sich an die Verschiedenheiten in der Menge von Elementen bey den einzelnen Formen zu kehren, die obigen Regeln in Anwendung; soll es arithmographisch geschehn, so scheidet man zuvor die Formen nach der Zahl von Elementen, die in ihnen liegen, in Classen, und verfährt dann mit jeder Classe, wie vorhin. Auf die eine oder die andre Weise, sollen auch im Folgenden alle Formen jederzeit geordnet erscheinen.

I. Die erste combinatorische Operation ist das **Permutiren**, wo man alle in einer gegebenen Menge liegenden Elemente nimt, um ihre Folge auf jede mögliche Art zu verändern. Dabey kann ausser dem einfachsten Falle, wo jedes der gegebenen Elemente als verschieden von den übrigen gedacht, und dem gemäß bezeichnet wird, auch noch der eintreten, daß mehrere unter diesen Elementen als identisch angesehen werden sollen, so daß eine Verwechslung derselben keinen Unterschied hervorbringen soll, in welchem Fall sie mit demselben Zeichen angedeutet werden müssen. Es werde nun das Eine oder das Andre angenommen, so bleibt dabey die Nothwendigkeit, daß verschiedene Formen solche heissen sollen, bey denen würklich verschiedene Elemente nicht durchaus die nemlichen Stellen einnehmen; es wird also möglich seyn, diese Formen als verschieden im Range anzunehmen, und dem gemäß eine Ordnung unter ihnen festzusetzen, ja man wird durch die Vorstel-

lung dieses Ranges sie allmälig, eine aus der andern, abzuleiten im Stande seyn. Die niedrigste unter allen diesen Formen findet sich leicht; man setzt nur die gegebenen Elemente in natürlicher Folge nach einander. Aus jeder Form die nächst-höhere abzuleiten, hat eben so wenig Schwierigkeit; man sucht die späteste Stelle der Form auf, in welche, ohne die früheren zu berühren, etwas Höheres gesetzt werden kann, als würklich in ihr steht. Dieses Höhere muß also aus einer noch späteren Stelle der vorliegenden Form herrühren. Sollten solcher noch späteren Stellen, die etwas Höheres enthielten, mehrere seyn, so nimmt man aus ihnen das Element, welches sich am wenigsten über jenes anfängliche erhebt, um es für dasselbe an den Platz zu setzen. Bleibt nur der ganze frühere Theil der Form unberührt, so ist schon durch diesen Act eine Erhöhung der Form vorgegangen, wie auch das herausgeworfene Element, nebst den in dem folgenden Theile der Form befindlichen, in die nachfolgenden Stellen gesetzt werden mag. Man wird aber alle diese Elemente jedesmal in natürlicher Ordnung nacheinander zu reihen haben, damit die Erhöhung so wenig als möglich betrage. Dieser Regel zufolge kann man, von der niedrigsten Form ausgehend, allmälig jede successiv höhere aus der unmittelbar vorhergehenden ableiten, und so endlich alle finden.

Es gibt aber zwischen Permutationsformen noch eine andre Verwandschaft, als die des Ranges oder der Cōrdination. Es mögen aus gewissen Elementen schon alle möglichen Formen gebildet seyn. Sie zerfallen von selbst in mehrere Arten oder **Ordnungen**, wenn zu der nemlichen Ordnung alle die gerechnet werden sollen, welche dasselbe Anfangs-Element besitzen. Sondert man bey Formen der nemlichen Ordnung das Anfangs-Element ab, so bleiben Formen übrig, die aus den andern Elementen gebildet sind, und zwar alle, die sich aus ihnen bilden lassen. Daher die Regel: um alle Formen zu erhalten, die ein gewisses Element an der Spitze

führen, werfe man dieses aus der Reihe der gegebenen weg, permutire die übrigen, und stelle den dadurch entstandenen Complexionen jenes Element wieder vor. Indessen läßt sich dies Verfahren nur dann auf eine einfache Art durchführen, wenn die Elemente alle von einander verschieden sind, so daß sie alle auf gleiche Weise in den Formen erscheinen. Alsdann sieht man allmälig jedes folgende Element als neu hinzugekommen zu den vorhergehenden an, und setzt es anfangs allen den Formen vor, die sich aus diesen schon gebildet haben. Dadurch erhält man alle diejenigen Complexionen, welche jenes Element an der Spitze führen. Wenn man in diesen das Anfangs-Element mit dem nächstniedrigern vertauscht, so erhält man alle Formen der nächstniedrigern Ordnung, und, wenn man so mit dem Vertauschen fortfährt, gehen allmälig alle Ordnungen von der höchsten bis zur niedrigsten hervor. Aber dies Verfahren läßt sich bey Elementen, unter denen mehrere gleiche vorkommen, nicht gebrauchen, ist also insofern nur als speciell zu betrachten.

Man kann, auch ohne die Permutationsformen vollständig zu bilden, ihre mögliche Anzahl zum Voraus bestimmen. Am leichtesten geschieht es, wenn die Elemente durchaus von einander verschieden sind. Man habe die Formen, welche aus einer gewissen Menge von Elementen möglich sind, schon gebildet. Kommt ein neues hinzu, so erscheinen diese Formen, das neue an der Spitze, sämmtlich wieder, bilden aber so nur eine Ordnung zusammengesetzterer Complexionen, und wiederholen sich für jedes der vorhergehenden Elemente, indem es durch Vertauschung allmälig an ihre Spitze gelangt. Man bekommt also die Zahl der vorigen Formen so oft, als Elemente vorhanden sind, das neu hinzugekommene mitgerechnet; kürzer: die Zahl der schon vorher vorhandenen Formen multiplicirt sich, so oft ein neues hinzukommt, mit der Anzahl aller vorhandenen Elemente. Nun aber ist diese Zahl Eins, wenn nur ein Element vorhanden ist, sie wird also allmälig

ein Product aller ganzen Zahlen von Eins an, bis zu derjenigen hinauf, welche anzeigt, wieviel Elemente überall vorhanden sind. In Zeichen: Ist n die Zahl der vorhandenen Elemente, so ist 1 . 2 . 3 . . . n die Menge der aus ihnen möglichen Permutationsformen.

Sind aber unter den Elementen mehrere einander gleiche, so findet sich die Menge der Formen nur mittelbar. Es mögen alle diese Formen würklich vorhanden seyn. Jede von ihnen, wenn sich die unter einander gleichen Elemente in lauter verschiedene verwandelten, könnte alsdann noch so viel neue Gestalten annehmen, als sich durch Versetzung jener, so eben verschieden gewordener Elemente, untereinander, ohne Berührung der übrigen ableiten ließen. Man multiplicire also die Zahl der anfänglich vorhandenen Formen mit der Permutationszahl der kleineren Menge, welche jetzt in ihr gleiche Elemente enthält, und man wird erfahren, wieviel Formen aus allen gegebenen Elementen, wenn keine einander gleiche darunter wären, gebildet werden könnten. Aber diese volle Permutationszahl ist schon anderweitig bekannt, kann also rückwärts dienen, die gesuchte zu finden. Man dividire sie durch die Permutationszahl der Menge, welche die vorhandenen gleichen Elemente zählt, und der Quotient wird anzeigen, wie viele Formen unter Beybehaltung dieser gleichen Elemente möglich sind. In Zeichen: Sind n Elemente vorhanden, so ist 1 . 2 . 3 . . . n ihre volle Permutationszahl. Sind aber unter diesen Dingen m einander völlig gleiche, also 1 . 2 . 3 . . . m deren Permutationszahl, so wird $\frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots m}$ die Menge der möglichen Formen seyn. Sollten mehrere verschiedene Arten gleicher Elemente vorhanden seyn, so hat man aus demselben Grunde mit der Versetzungszahl, die jeder von diesen kleineren Mengen für sich zukommt, zu dividiren: Sind unter n Dingen p gleiche einer gewissen Art, und q gleiche einer andern Art,

die übrigen von ihnen und unter sich verschieden, so ist $\frac{1.2....n}{1.2..p.1.2..q}$ die Anzahl der möglichen Complexionen.

II. **Combiniren** im eigentlichen Sinne heißt: aus einer gegebenen Reihe von Elementen Glieder ausheben, und davon Zusammenstellungen machen, so daß nur die Formen als verschiedene angesehn werden, welche nicht durchaus die nemlichen Elemente in sich fassen. Es versteht sich, daß auch hier alle möglichen Formen gefordert werden. Es können übrigens unter den Elementen mehrere einander gleich, sie können auch sämmtlich verschieden seyn. Das Zeichen C soll im Folgenden den Inbegriff gewisser Combinationsformen andeuten, und ein über dasselbe gesetzter Anzeiger den Grad der Classe bestimmen, wozu die Formen gehören sollen. $\overset{4}{C}$ z. E. bedeute alle Combinationen zu je 4, die aus gewissen Elementen möglich sind.

Da es bey Combinationsformen auf die Folge der zusammengestellten Elemente nicht ankommt, und Aenderung derselben keine verschiedenen Formen hervorbringt, so darf man sich das Einfachste in dieser Absicht zur Regel erwählen. Die Elemente sollen in jeder Combinationsform die natürliche Ordnung beobachten, so daß nie ein höheres vorangeht, und ein niedrigeres nachfolgt.

Uebrigens muß bey dem Aufstellen der Elemente ausdrücklich angegeben werden, wie oft jedes von ihnen vorkommt, denn, obgleich die Operation selbst immer dieselbe bleibt, so hat man doch bey ihrer Zusammenfügung in die Formen darauf Rücksicht zu nehmen. Sollte ein Element bey dem Bilden der Combinationsformen so oft, als man wollen könnte, gesetzt werden dürfen, so genügte bey dem Aufstellen des Stoffes ein einmaliges Setzen desselben mit einem beygefügten Wiederholungszeichen (wohl am natürlichsten durch Punctirung erreichbar. So würde z. E. $\overset{4}{C}(1..,2..,3..)$ alle Combinationen

zu 4 aus den Elementen 1, 2, 3, deren jedes dabey in den Formen so oft, als es die Zahl ihrer Plätze gestattet, erscheinen dürfte, bedeuten, $\overset{5}{C}(1 \ldots 2, 2, 3)$ alle Combinationen von 5 Elementen, die entweder 1, oder 2, oder 3 seyn müssen, wobey aber das Element 1 so oft als man will, 2 nur zweymal, 3 nur einmal in der einzelen Form auftreten dürfte. In sehr vielen Fällen der Anwendung liegt es so klar in der Natur der Sache, ob dabey unbedingte oder gänzlich untersagte Wiederholbarkeit der Elemente stattfindet, daß man Angaben darüber, durch ausdrückliche Bezeichnung, für überflüssig hält.

Es sey nun eine gewisse Reihe von Elementen gegeben, und es werde gefordert, alle Combinationen einer bestimmt vorgeschriebenen Classe aus ihnen zu bilden. Hier sind, wie bey der Permutation, wieder zwey Wege möglich, der eine auf Coordination, der andre auf Subordination der Formen gegründet.

Bey dem ersten beginnt man mit der niedrigsten Form, jede Stelle folglich so niedrig besetzend als man darf. So lange also noch ein früheres Element wiederholt werden kann, ist es nicht erlaubt, ein späteres zu setzen. Sind alle Elemente verschieden, so setzt man sie in natürlicher Ordnung, bis die Menge der Classe erreicht ist. Um aus einer gegebenen Form die nächsthöhere abzuleiten, sucht man die späteste Stelle auf, in welche aus den gegebenen Elementen ein höheres gesetzt werden kann, als in ihr steht; setzt das am wenigsten höhere in diese Stelle, und füllt alle folgenden so niedrig als möglich aus. Dieses Ausfüllen muß nach Maaßgabe der vorhandenen Elemente geschehn, aber allemal unfehlbar so, daß keine Unordnung dabey entsteht; also nie in der Form ein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Sind daher noch Elemente vorhanden, die dem neu hineingesetzten gleich sind, so besetzt man mit ihnen die folgenden Stellen so lange man

darf, und überhaupt folgende Stellen so lange mit dem nemlichen Elemente, als die vorgeschriebene Wiederholbarkeit desselben gestattet, ehe man zu dem nächsthöheren fortschreitet, um mit ihm dasselbe Verfahren zu wiederholen. Diese Arbeit ist freylich in den beyden äußersten Fällen am leichtesten zu verrichten. Bey unbedingter Wiederholbarkeit füllt man alle folgenden Stellen mit demselben Elemente aus, welches zur Erhöhung in eine gewisse vorhergehende gesetzt worden war; bey durchaus verbotener Wiederholung mit lauter verschiedenen, so wie sie in natürlicher Ordnung auf das, der Erhöhung wegen hineingesetzte, Element, und auf einander folgen. Indessen bleibt die Operation selbst in allen Fällen die nemliche, und nur verschiedene Beschaffenheit der Dinge woran sie vollzogen werden soll, modificirt ihren, immerfort auf demselben Grunde beruhenden Gang *).

Eben so leicht bietet sich die Möglichkeit und die Methode eines von niedrigern Formen zu höheren aufsteigenden Verfahrens dar. Man habe aus gegebenen Elementen alle Complexionen schon gebildet, welche einer gewissen Classe angehören. Setzt man einer solchen Complexion noch ein Element zu, ohne sonst dadurch eine Bedingung der Operation zu verletzen, so entsteht aus ihr eine Complexion der nächsthöheren Classe. Nimt man alle mögliche Formen einer gewissen Classe, um jeder von ihnen jedes der gegebenen Elemente beyzufügen, in sofern es die Bedingungen der Operation selbst erlauben,

*) Aus dem Combiniren an Elementen, die sich wiederholen dürfen, eine ganz andere Operation zu machen, als aus demjenigen, wobey kein Element wiederholt werden darf, und, dem gemäß, für diese Operationen verschiedene Zeichen einzuführen, würde sehr unrichtig seyn. Die Verschiedenheit liegt in den Elementen, womit man zu thun hat; der Inder, worauf sich die combinatorische Operation bezieht, ist im ersten Falle nicht so gebaut, wie im zweyten. Höchstens könnte es in Absicht auf ihn bey wiederholbaren Elementen von einer Abkürzung im Schreiben, so daß jedes Element nur einmal, und, wie oft es sich wiederholen darf, durch eine besondre Zahl daneben, angegeben würde, noch die Rede seyn.

und sich dabey keine identische Formen einstellen, so muß man auf diese Art alle Complexionen der nächsthöheren Classe erhalten. Dieses Beyfügen geschieht am schicklichsten durch Stellung an die Spitze, da es für jede Complexion doch nur einmal geschehn darf. Dabey werden sich die Bedingungen der Operation am leichtesten befriedigen lassen. Jedes der gegebenen Elemente darf nur denjenigen Complexionen der vorigen Classe vorgesetzt werden, in denen dadurch kein Verstoß der Folge gegen die natürliche Rangordnung der Elemente entsteht. Ist also Wiederholung unbedingt gestattet, so darf es allen den Formen vorgesetzt werden, die nicht niedriger anfangen; ist sie bedingt gestattet, allen den Formen, welche in ihren ersten Stellen das vorzusetzende Element noch nicht so oft enthalten, als es überall vorkommen darf; ist sie gar nicht gestattet, allen den Formen der vorigen Classe, welche mit einem höheren Elemente anheben, als das vorzusetzende ist. Nimt man nach der Reihe jedes der gegebenen, wirklich verschiedenen Elemente, um es unter diesen Beschränkungen allen Complexionen vorzusetzen, die zu einer gewissen Classe gehören, so müssen alle Formen der nächsthöheren Classe in gesetzmässiger Ordnung hervorgehn. Sollte nicht bloß eine Classe von Combinationsformen, sondern deren mehrere, von der ersten an, bis zu einer gewissen höheren, gefordert werden, und wollte man den Inbegriff aller dieser Formen, lexicographisch zusammengeordnet, erhalten, so wäre es nicht nöthig jede Classe erst für sich, nach den vorigen Regeln, zu entwickeln, und dann diese Formen nach den Gesetzen der lexicographischen Folge aneinander zu reihen, sondern man könnte durch Uebergehn von einer Form zur nächsthöheren, hier, wie sonst, die vollständige Darstellung aller vollbringen. Man lasse auf das letzte Element einer Form das kleinste folgen, welches ohne Unordnung, Ueberschreitung der für jedes bestimmten Wiederholbarkeit, Uebersteigung des Grades der höchsten Classe, wovon Formen vorkommen dürfen, geschehn kann, so hat man,

so oft es möglich ist, eine nächsthöhere Form. Geht dieses Zusetzen nicht mehr an, so suche man in der Form die tiefste Stelle auf, welche ein höheres Element enthalten kann, als das in ihr stehende ist, und setze in sie ein so wenig als möglich höheres würklich für das ehemalige an den Platz. Dadurch erhält man alsdann, ohne Weiteres, die nächsthöhere Form. Indessen mögte die ganze Operation selten vorkommen.

Bemerkenswerth ist die Verwandschaft des Permutirens mit dem Combiniren. Man lasse alle gegebenen Elemente, als wenn permutirt werden sollte, auf einander folgen, mache aber in diese Permutationsform gewissermaßen einen Einschnitt, der von ihren Elementen so viele der anfänglichen abschneidet, als der Grad der zu bildenden Combinations-Classe deren fordert. Und nun permutire man unter der Beschränkung, daß nur die Formen für verschieden gehalten werden sollen, bey denen nicht durchaus dieselben Elemente in den nemlichen Abschnitten der Permutationsform stehn geblieben sind. Es würde leicht seyn für ein solches bedingtes Permutiren, ursprüngliche Regeln zu geben, selbst in dem Falle, wo der Abschnitte in der gegebenen Elementenreihe noch mehrere gemacht würden, so daß nur die Formen für verschieden gelten sollten, bey welchen keine bloße Permutation der in demselben Abschnitte enthaltenen Elemente vorgegangen wäre. Hier ist nicht die Stelle für eine weitere Ausführung dieser höchstwichtigen zusammengesetzten combinatorischen Operation, auf welche man bey einer großen Menge bedeutender Untersuchungen zurückgeführt wird. Nur ein Beyspiel ihres Gebrauchs. Sind n verschiedene Dinge gegeben, aus denen man alle Combinationen zu m bilden soll, so macht man in die Reihe der n Elemente einen Abschnitt, der m auf der einen, $n-m$ auf der andern Seite liegen haben wird. Der Permutationen dieser n Dinge würden in Allem $n.(n-1)....1$ seyn, ohne alle Beschränkung. Dürfen aber die m Dinge des ersten Abschnitts nicht unter einander permutirt werden, und

eben so wenig die n — m Dinge im zweyten Abschnitt, so reducirt sich die Zahl der Formen auf $\frac{n.(n-1).....1}{m.(m-1)...1.(n-m)...1}$ oder abgekürzt auf $\frac{n.(n-1)...(n-m+1)}{m.(m-1)....1}$, welches also die Zahl aller Combinationen zu m aus n Dingen ist.

III. Die Variation ist eine ordnende Operation, bey welcher schon mehrere getrennte Reihen von Elementen vorausgesetzt werden. Sie greift in alle diese Reihen ein, um aus jeder von ihnen ein Element herauszunehmen, und es mit andern aus den übrigen Reihen zusammenzustellen; sie verlangt aber eine gänzliche Vollständigkeit in Absicht der Complexionen, die sich auf diese Art bilden lassen. Das Zeichen V, mit den Andeutungen mehrerer gegebener Reihen in Verbindung gesetzt, soll im Nachfolgenden den Inbegriff aller Formen andeuten, die sich auf die angegebene Weise aus allen Gliedern dieser Reihen bilden lassen. Zu welcher Classe die entstehenden Formen gehören, wird sich jedesmal von selbst ergeben durch die Anzahl der Reihen, aus deren Elementen sie sich bilden. Man wird indessen auch dies durch einen übergesetzten Index ausdrücklich bemerken können $\overset{r}{V}$ wird dem gemäß den Inbegriff aller Variationsformen aus r gegebenen Reihen bezeichnen, von welchen Formen jede eben darum r Elemente enthält, oder der rten Classe angehört.

Bey der würklichen Ausführung dieser Operation bietet sich, als natürliche Regel der Ordnung, von selbst die Forderung dar, daß in der Folge, wie die gegebenen Reihen mit ihren Elementen, wovon sie jedesmal eines darbieten, zu der Bildung der Formen beytragen, eine unabänderliche Ordnung beobachtet werde. Die erste Stelle der Form soll immer aus der ersten Reihe, die zweyte aus der zweyten, besetzt werden, und so fort, dadurch erlangt man die Möglichkeit, der an=

fangs für eine einzelne Reihe von Elementen gewählten Bezeichnung auch hier getreu bleiben zu können. Man bezeichne immerhin alle ersten Glieder der gegebenen Reihen mit 1, alle zweyten mit 2, überhaupt alle gleichhohen mit der Zahl, welche ausdrückt, die wievielsten sie in ihrer Reihe sind, es kann daraus keine Unbestimmtheit entspringen, sobald in den würklich gebildeten Formen die Stelle des Elements dient, diejenige unter den gegebenen Reihen nachzuweisen, auf welche es Beziehung haben soll. Auf diese Art kann also ein einziger gemeinschaftlicher Index, die Reihe der ganzen Zahlen, für alle gegebenen Reihen zugleich gebraucht werden.

Auch die Variationsformen werden zu einer bestimmten Classe gehören, die sich aber nicht nach Willkühr, sondern durch die Menge der Reihen, woraus sie gebildet werden sollen, bestimmen läßt.

Hat die eine der gegebenen Reihen so viele Elemente als die andre, dann bedarf es, um die Zusammensetzung der Formen zu beginnen, nur des allen diesen Reihen gemeinschaftlichen Index, und des Grades der Classe, wozu die Formen gehören sollen. Hat aber die eine der gegebenen Reihen nicht so viele Elemente als die andre, so ist bey dem Gebrauche ihres gemeinschaftlichen Index doch noch Rücksicht auf jede einzelne Reihe zu nehmen, damit nicht aus einer Reihe ein Glied von gewisser Zahl gefordert werde, welches in ihr nicht enthalten ist *).

*) In dem Falle, wo die gegebenen Reihen nicht gleichviele Elemente haben, oder gar in ihnen Lücken vorkommen, wird man gezwungen seyn, ein ziemlich umständliches Verfahren bey der Entwicklung der Variationsformen zu beobachten. Hier würde es am bequemsten seyn, alle Formen untereinander zu setzen, und ein für allemal, über jede Stelle der Formen, die Elemente der Reihe zu schreiben, aus welcher diese Stelle besetzt werden muß. Alsdann hat man, bey der Besetzung einer Stelle, immer nur Rücksicht auf die über ihr stehenden Elemente zu nehmen; soll sie so wenig als möglich erhöht werden, so ist es das am wenigsten höhere Element aus der

Bey der Bildung der Variationsformen ist das allmälig von niedrigern Formen zu höheren, nach successiv wachsenden Graden der Classen, aufsteigende Verfahren das natürlichste. Man setze die Elemente der ersten Reihe einzeln; man füge ihnen allen, nach der Ordnung, die successiven Elemente der zweyten bey. Soll dies Beyfügen ein Nachsetzen seyn, wie es die Ordnung im Zusammenfügen der Elemente aus den verschiedenen Reihen in die successiven Stellen der Formen fordert, und sollen die Formen selbst in gehöriger Folge hervorgehn, so muß man mit dem niedrigsten Elemente der ersten Reihe beginnen, und ihm vollständig alle Elemente der zweyten allmälig nachsetzen, darauf das zweyte Element der ersten Reihe, um damit eben so zu verfahren, und so fort die übrigen. Allgemein: wenn die Variationsformen aus mehreren Reihen schon gebildet, und in gehöriger Ordnung gegeben sind, so erhält man aus ihnen diejenigen, welche bey einer Verbindung der vorigen Reihen mit einer neuen, zu Variationsformen, überhaupt erzeugt werden können, wenn man allmälig jede der schon vorhandenen Formen nimt, um ihr nach und nach alle Elemente der neuen Reihe in ihrer Ordnung nachzusetzen, so daß man zu keiner folgenden Form fortschreitet, ehe man nicht der vorhergehenden alle die Elementen nachgesetzt hat, welche die neue Reihe in sich schließt. Bey diesem Verfahren bedarf man kaum eines Index; man könnte es mit den gegebenen Reihen selbst unmittelbar in Ausübung setzen. Dabey ist es völlig gleichgültig, ob jede der Reihen so viele Elemente hat, als die andren, oder nicht.

Aus dieser Regel folgt auf den ersten Blick, daß die Anzahl der entstehenden Formen ein Product aus den Zahlen seyn muß, welche für die vorhandenen Elementenreihen ange-

---

Reihe der über ihr stehenden; soll sie so niedrig als möglich besetzt werden, so ist es das niedrigste der über ihr stehenden Elemente, womit man sie zu besetzen hat.

ben, wie viele Glieder jede derselben habe. Für den Fall, wo alle jene Reihen gleich viele Glieder haben, würde also, wenn die Zahl der Glieder in jeder Reihe = r, die Menge der Reihen selbst = n seyn soll, r^n die Anzahl der möglichen Variationsformen seyn.

Braucht man aber für alle Reihen einen gemeinschaftlichen Inder, so bekommen die Formen Aehnlichkeit mit Combinationsformen, die sich aus eben dem Inder bilden könnten. Nur würde jedes Element sich wiederholen, insofern eines von seiner Zahl in mehreren, oder allen vorhandenen Reihen vorkommt, folglich wegen jeder in die Variationsformen eintreten kann. Auch würde man bey diesen Formen Unordnung in der Folge ihrer einzelnen Elemente nicht umgehn können, weil jedes Element einer folgenden Reihe, es sey hoch oder niedrig, allen Formen aus den vorhergehenden Reihen unbedingt nachgesetzt werden soll. Wollte man auf eine ähnliche Weise, wie bey den ursprünglichen combinatorischen Operationen, der Rangordnung zufolge, welche unter verschiedenen Variationsformen Statt finden kann, von der niedrigsten ausgehn, und allmälig zu jeder successiv höheren fortschreiten, so würde hier, im Allgemeinen, folgendes Verfahren nöthig seyn. Jede Stelle der Formen ist an eine bestimmte Reihe gebunden, so daß sie nur aus dieser die Elemente empfangen kann, wodurch sie besetzt werden soll. Um die niedrigste Form zu erhalten, besetze man also jede Stelle mit dem niedrigsten Elemente, welches die zur Ausfüllung dieser Stelle bestimmte Reihe in sich faßt. Um zu einer gegebenen Form die nächsthöhere zu finden, suche man die späteste Stelle der Form, in welche, aus der, ihr zugehörigen Reihe, noch ein höheres Element gesetzt werden darf, und bringe in sie das am wenigsten höhere wieder hinein; die folgenden Stellen fülle man jede mit dem allerniedrigsten Elemente aus, welches in den, zu ihrer Erfüllung angewiesenen Reihen, überall vorkommt, dadurch entsteht die nächsthöhere Form. In dem Specialfalle, wo jede der gegebenen

Reihen so viel Elemente, als die andre besitzt, vom ersten an bis zum höchsten hinauf, kann sich dieses Verfahren sehr abkürzen, weil alsdann die Elemente, womit die eine Stelle der Form, so wie die andre, besetzt werden kann, ein für allemal bekannt, und immer dieselben sind. Alsdann kann es heissen: man setze in die möglichst späteste Stelle ein nächstgrößeres Element, und fülle alle folgenden nach ihr, so oft es deren geben sollte, mit lauter Elementen der niedrigsten Art aus. In diesem Falle erscheinen die Variationsformen als Combinationscomplexionen, die sich aus einer einzigen Reihe von Elementen, dem gemeinschaftlichen Index aller vorhandnen Reihen der gegebenen Dinge, gebildet hätten, dabey aber in allen Permutationen, die ihre Elemente erlaubten, vollständig dargestellt. Gerade dieser Fall kommt im arithmetischen Gebrauche des Variirens sehr häufig vor, und die Regel für ihn ist von ausserordentlicher Wichtigkeit. Sind, so lautet sie, mehrere an Zahl und Rang der Elemente völlig gleiche Reihen vorhanden, so bezeichne man ihre gleichhohen Glieder durch dieselbe Zahl, und bilde auf diese Art einen Index, welcher die natürlichen Zahlen, nach der Ordnung, enthalten wird. Aus diesem Index erzeuge man zuerst alle möglichen Combinationsformen des Grades, welcher durch die Zahl der vorhandenen Reihen vorgeschrieben ist. Alsdann permutire man vollständig auf alle möglichen Arten jede dieser Combinationsformen. Der Inbegriff aller daraus entstandenen Complexionen gibt die gesuchten Variationsformen, in denen jedes Element ein Glied aus einer der gegebenen Reihen bedeutet, so daß die Zahl der Stelle, worin das Element steht, die Zahl der Reihe nachweist, woraus es genommen werden soll. Bloß in diesem letzten Falle also dürfte man allenfalls sagen, daß die Variation sich auf Permutiren und Combiniren zurückführen läßt; in allen übrigen, sobald z. E. die eine Reihe nicht eben so viel Elemente hat, als die andre, oder einzelne Glieder, in der einen oder der andern, von gewisser Zahl, nicht vorhanden

sind, welches doch im Allgemeinen eben so gut gedacht werden kann, findet diese Zurückführung durchaus keine Statt, und es bleibt das Variiren ein ursprüngliches, obgleich schon zusammengesetztes combinatorisches Verfahren. Für die Arithmetik ist es das wichtigste unter allen, denn vermöge seiner, treten zuerst die Begriffe und Regeln der Combinationslehre in die Wissenschaft der Zahlenverknüpfungen ein.

IV. Die Bedürfnisse der Analysis führen die Nothwendigkeit herbey, die beyden Operationen des Combinirens und Variirens noch unter einer näher modificirenden Bedingung zu betrachten, wobey es darauf ankommt, daß man, vorausgesetzt die gegebenen Elemente seyen durch Numern repräsentirt, und aus diesen die Andeutungen der Formen gebildet, alle diejenigen Formen einer bestimmt vorgeschriebenen Art zusammenstellen soll, in denen die Numern der Elemente zusammengerechnet eine vorgeschriebene Summe ausmachen.

A. **Combinationen zu bestimmten Summen.** In Zeichen sollen alle Combinationsformen der rten Classe, in denen die Numern der Elemente, welche der Kürze wegen späterhin selbst die Elemente der Formen heissen mögen, die Summe n geben, durch $^{n}\overset{r}{C}$ angedeutet werden. Ohne den Index r würde das Zeichen ^{n}C alle Combinationsformen zur Summe n ohne Rücksicht auf Classen, und eben darum für alle Classen, bedeuten.

Die nächsten Zwecke der Analysis verlangen nur für den Fall, wo jedes Element beliebig oft wiederholbar ist, und alle Combinationsformen einer vorgeschriebenen Classe angehören sollen, eine befriedigende Regel. Diese kann aber durch den Gebrauch des coordinirenden Verfahrens sogleich herbeygeführt werden. Jedoch muß man in der Ausführung 2 Fälle unterscheiden: Entweder die gegebenen Elemente brechen nicht ab. In diesem Fall besetzt man alle Plätze der Form mit dem niedrigsten Element, und bringt in die letzte dasjenige, welches

mit ihnen zusammen die geforderte Summe erzeugt, so hat man die niedrigste Form, die dieser Summe angehören kann. Um von einer schon vorhandenen Form, die eine bestimmte Summe darstellt, zu der nächsthöheren fortzugehn, sucht man in ihr die späteste Stelle in welcher ein Element steht, das, um 1 vermehrt, noch etwas Kleineres darbietet, als die Summe der Elemente in allen folgenden Stellen, durch ihre eigne Zahl dividirt. Gibt es eine solche, so erhöht man ihr Element um 1, besetzt alle folgenden Stellen eben so, und füllt die letzte mit dem, was die geforderte Summe ergänzt.

Oder die gegebenen Elemente gehn nur bis zu einer bestimmten Zahl hinauf, und brechen alsdann gänzlich ab.

In diesem Fall bleiben ganz die vorigen Regeln, nur daß man ihnen hinzufügen muß: sollte kein so hohes Element vorhanden seyn, als zur jedesmaligen Besetzung der letzten Stelle in der Form, damit diese die geforderte Summe ergebe, nöthig seyn mögte, so besetze man diese so hoch als man kann, und lasse das, was dann noch fehlt, allmälig durch Erhöhung der Elemente in den rückwärts vom Ende durchlaufenen Stellen hinzutreten, wobey aber auch das größte vorhandene Element nicht überschritten, und zu keiner neuen Stelle rückwärts gegangen werden darf, ehe in die vorhergehende das größte vorhandene Element gesetzt worden ist.

B. Variationen zu bestimmten Summen. Wenn, wie es bey dem Bilden von Variationsformen vorausgesetzt wird, die Elemente mehrerer vorhandenen Reihen durch Indices angedeutet werden, welche aus der natürlichen Zahlenreihe hergenommen sind, so ergibt es sich auch hier von selbst, daß sich alle solche, in einer Form zusammengestellte, Indices zusammen addiren lassen, und eine bestimmte Summe bringen müssen; daß man also, wo sich anderweitig Inbegriffe von Variationsformen erzeugen, verlangen kann, alle diejenigen dazu gehörigen, deren Indices (hier selbst Elemente genannt) eine gewisse bestimmte Summe ausmachen, voll-

ständig zusammengestellt zu erhalten. Das Zeichen ${}^{m}V$ soll weiterhin alle Variationsformen zur Summe m, anzeigen das näher bestimmte ${}^{m}\overset{r}{V}$, alle Variationsformen der rten Classe, deren Elemente zusammenaddirt die Summe m erzeugen, zur Andeutung bringen.

Für die Zwecke der Analysis genügt, in Absicht auf den bey einem so modifizirten Variiren anzunehmenden Stoff, die Voraussetzung, daß die Reihen, aus deren Elementen die Formen gebildet werden sollen, gleichviele und gleichhohe Glieder besitzen, also durch eine einzige, ihre Indices enthaltende, repräsentirt werden können.

Es werde unter dieser Voraussetzung verlangt, alle Variationsformen aufzustellen, in denen die Elemente eine gewisse, unabänderlich bestimmte, Summe darstellen, und dabey sämmtlich zu der, durch die Zahl der Reihen vorgeschriebenen Classe gehören. Dabey wird ein gedoppelter Fall erwogen werden müssen: entweder die Glieder der Reihen gehn in unbestimmte Weite fort, so daß deren von jeder noch so hohen Zahl vorhanden sind, oder sie brechen mit einem Gliede von bestimmt vorgeschriebener Höhe ab.

Das Verfahren, welches sich auch hier zuerst darbietet, ist das coordinirende, welches von der niedrigsten Form zu den successiv höheren fortschreitet. Um die niedrigste Form zu finden, setzt man in alle früheren Stellen das niedrigste der vorhandenen Elemente, aber in die allerletzte Stelle ein Element, groß genug um mit jenem die geforderte Summe voll zu machen. Bey einer beschränkten Zahl von Elementen hat man vielleicht kein so hohes mehr in seiner Gewalt, alsdann also besetzt man die letzte Stelle so hoch als man darf, und legt von dem Reste, der nun noch an der Summe, welche die Form darstellen soll, fehlen wird, allmälig den vorhergehenden Stellen das Höchste bey, was man nehmen kann, um die in ihnen zum Vorschein kommenden Elemente

nicht über die vorgeschriebene Grenze zu treiben, wobey sich von selbst versteht, daß man einer früheren Stelle nicht eher eine Erhöhung geben darf, als bis die, auf sie folgende, spätere, keine mehr anzunehmen fähig ist. Um zu einer schon gegebenen Form die nächsthöhere, derselben Summe und Classe angehörige, zu finden, suche man die späteste Stelle auf, deren Element sich erhöhen läßt, weil in einer noch späteren Stelle ein erniedrigungsfähiges Element vorhanden ist, welches den Stoff dazu hergeben kann. Man erhöhe das erste Element um eine Einheit, fülle alle folgenden Stellen mit dem niedrigsten aus, und setze in die letzte ein Element, welches mit allen übrigen die verlangte Summe hervorbringt. Sollte ein so hohes Element nicht vorhanden seyn, so verfahre man genau wieder, wie bey der Bildung der niedrigsten Form in dem nemlichen Falle.

Ein subordinirendes Verfahren, um alle Variationsformen einer bestimmten Classe zu erhalten, welche einer vorgeschriebenen Summe angehören, wird sich unter der Voraussetzung leicht organisiren lassen, daß, alle Variationsformen der nächstniedrigeren Classe die zu allen geringeren oder nicht höheren Summen als die geforderte gehören, bereits ausgebildet sind. Die, sich auf den ersten Blick rechtfertigende Regel, wird lauten: man nehme allmälig jede Gruppe von Formen der vorigen Classe, die einer niedrigeren Summe zugehört, und füge ihren Formen das Element bey, welches ihre Summe zu derjenigen ergänzt, die in den verlangten Formen der nächsthöheren Classe herrschen soll. Die Analysis bedarf dieser Regel hauptsächlich für den Fall, wo alle gegebenen Reihen identisch sind, und sich durch das Schema $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots$ repräsentiren. Alsdann wird sich derselbe, wofern unbestimmt die Zahl der Reihen m ist, in Zeichen durch den Ausdruck

$${}^{n}\overset{m}{V} = {}^{0}\overset{m-1}{V}\,\overset{n}{a} + {}^{1}\overset{m-1}{V}\,\overset{n-1}{a} + \dots {}^{h}\overset{m-1}{V}\,\overset{n-h}{a} \dots + {}^{n}\overset{m-1}{V}\,\overset{0}{a}$$

darstellen.

Schließlich ist, in Absicht auf die Bildung von Variationsformen zu bestimmten Summen, auch der Fall für die Analysis erheblich, wo man, angenommen, daß mehrere identische Reihen, deren Schema $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$ ist, gegeben sind, aus ihnen alle Variationsformen zu einer bestimmten Summe, von der ersten Classe bis zu der höchsten, welche die Zahl der vorhandenen Reihe gestattet, zusammengestellt erhalten wollte. Man denke sich alle Formen, die einer bestimmten Summe angehören, vollständig beysammen. Man könnte sie auf jeden Fall nach ihren verschiedenen Anfangselementen in verschiedene Ordnungen abtheilen. Sonderte man von allen, die derselben Ordnung angehören, das diese Ordnung bestimmende Anfangselement ab, so müßten alle die Formen übrig bleiben welche einer Summe angehören, die um die Zahl des abgesonderten Elements niedriger ist, wie die anfängliche. Umgekehrt also wird man alle möglichen Formen erhalten, wenn man allmälig jedes vorhandene Element als Anfangselement setzt, und es jedesmal als solches an die Spitze aller der Formen treten läßt, die einer Summe gehören, welche mit dem Index des Elements selbst zusammen die geforderte ausmacht.

In Zeichen, vorausgesetzt daß V alle Variationsformen sie mögen welcher Classe man will angehören, bedeute:

$$ {}^{n}V = {}^{n-1}V\overset{1}{a} + {}^{n-2}V\overset{2}{a} + \ldots {}^{n-h}V\overset{h}{a} \ldots + {}^{1}V\overset{n-1}{a} + \overset{n}{a}. $$

Drittes Kapitel.

Addition, Subtraction. Erster Hauptfall der Multiplication.

Der Vollständigkeit wegen ist es erforderlich, selbst die einfachsten arithmetischen Operationen, sofern sie an Ausdrücken vollzogen werden sollen, welche nach den für die Grundform

der Analysis gewählten Gesetzen gebildet sind, in Betrachtung zu ziehn, ungeachtet sich dabey, nur etwas verallgemeinert, die Regeln des gewöhnlichen Rechnens mit decadisch gebildeten Zahlen wiederholen.

I. Bey der **Addition** mehrerer Formen, welche nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße geordnet sind, braucht nichts weiter zu geschehn, als eine Zusammenstellung derselben, wobey gleichhohe Glieder sich zu einander gesellen. Sie sind das Einzige, was vereinigt werden kann und muß; man sondert die gemeinschaftliche Potenz der Hauptgröße in ihnen ab, addirt das was übrig bleibt, das heißt die Coeffizienten der einzelnen Glieder, zusammen, und setzt dieser Summe jene abgesonderte Potenz der Hauptgröße wieder bey. Diese einzelnen Summen stellen von selbst eine nach successiven Potenzen derselben Hauptgröße fortschreitende Form dar, und man hat hier weniger Arbeit als bey der Vereinigung vielziffriger Zahlen, weil das Uebertragen aus einer Summe in die nächsthöhere, wegen der Unbestimmtheit der Hauptgröße, und der damit verknüpften Unbeschränktheit der Coeffizienten, jezt keine Statt haben kann.

II. Für das **Subtrahiren** ergibt sich dieselbe Vorschrift. Minuend und Subtrahend so zusammengestellt, daß gleichhohe Glieder in beyden sich einander zugesellen; die gleichhohe Potenz der Hauptgröße aus zwey solchen Gliedern abgesondert; vom Coeffizienten des einen, den des andern abgezogen; dem Reste die vorher abgesonderte Potenz der Hauptgröße wieder beygefügt. So entstehn für die gesuchte Differenz einzelne Glieder, nach den successiven Potenzen der Hauptgröße von selbst fortschreitend.

III. Der erste und wichtigste, obgleich particuläre Fall der **Multiplication** ist offenbar derjenige, wobey man nur zwey Factoren annimt, deren jeder aber eine beliebig vieltheilige Größe von der durch die Grundform der Analysis vorgeschriebenen Gestalt ist. In Gemäßheit der ersten Grundregeln muß

man alsdann, um das Resultat zu erhalten, allmälig jeden Theil des Multiplicands nehmen, um ihn successiv durch jeden Theil des Multiplicators zu multipliciren, und die Producte in eine Summe zusammenziehen. Die einzelnen Theile aus beyden, die sich jedesmal mit einander multipliciren, sind in der Regel selbst Producte aus zwey Factoren: dem Coeffizienten, und einer Potenz der Hauptgröße. Indem man ein Paar solche Producte mit einander multiplicirt, wird man hier im Zusammenstellen ihrer Factoren die Ordnung befolgen, daß die beyden Potenzen der Hauptgröße sich in der Multiplication vereinigen, und eine dritte Potenz eben dieser Größe bilden, die, nach der bekannten Regel, die Summe der Exponenten, welche in den sich multiplicirenden Potenzen lagen, zu dem ihrigen bekommt, und daß eben so das Product der beyden Coeffizienten, als eine einzige Größe gedacht, jener Potenz zum Coeffizienten wieder beygegeben wird. Die einzelnen Producte, welche auf diese Art entstehn, müssen hernach so durch Addition vereinigt werden, daß alle die, welche einerley Potenz der Hauptgröße enthalten, zu einem Gliede zusammenfließen. Es muß also bey ihrer Bildung eine feste Ordnung beobachtet werden, die das vollständige Hervorgehn, und die nothwendige Zusammenstellung der zusammen gehörigen Producte mit sich bringt. Mögen die Ausdrücke, welche Multiplicand und Multiplicator darstellen, sich zuerst in steigender Form, durch:

$$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \dots + \overset{r}{a}x^r \dots$$

$$\overset{0}{b} + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 \dots + \overset{r}{b}x^r \dots$$

andeuten. Um nun in fester Ordnung und vollständig irgend ein Glied des Products, allgemein der Zahl nach das rte zu erhalten, braucht man nur die successiven Glieder des Multiplicand, vom eben sovielten an, rückwärts bis zum Anfangsgliede hin zu nehmen, und jedem das Glied des Multiplicators als Factor beyzufügen, dessen Zahl, mit der jenes

ersten durch Addition verbunden, die des geforderten ausmacht. So würde allgemein das rte Glied des Products:

$$(\overset{r}{a}\overset{0}{b} + \overset{r-1}{a}\overset{1}{b} \ldots + \overset{r-h}{a}\,.\,\overset{h}{b} + \ldots \overset{0}{a}\overset{r}{b})\,x^r$$

Es ist von selbst klar, daß für $r = o$, als Werth des Anfangsgliedes für das gesuchte Product, $\overset{o}{a}\overset{o}{b}$ erscheinen muß.

Diese Regel welche verlangt, alle möglichen Producte zu berechnen, deren erster Factor aus einer gewissen ersten, deren zweyter Factor aus einer zweyten Coeffizientenreihe genommen werden muß, so, daß die Indices beyder Factoren jedesmal eine bestimmte ganze Zahl r hervorbringen, ist einer zusammengezogenen Bezeichnung fähig. Deutet h jede beliebige ganze Zahl von o bis r an, so ist $\overset{r-h}{a}\,.\,\overset{h}{b}$ das allgemeine Schema aller jener einzelnen Producte. Um nun auszudrücken, daß in der That in demselben für h allmälig alle Werthe von o bis r inclusive gesetzt, und die Summe aller einzelnen Resultate gebildet werden soll, ist das Summationszeichen Σ, vor den Ausdruck des hten gesetzt, nur daß daneben bemerkt werde, daß für h allmälig alle ganze Zahlen, anhebend mit o, und schließend mit r gesetzt werden müssen, sehr zweckmäßig. So würde sich die ganze Andeutung auf $\overset{h}{o} \ldots r\Sigma(\overset{r-h}{a}\,.\,\overset{h}{b})\,x^r$ zusammenziehn.

Es ist klar aus der Regel selbst, daß man, um für das Product ein Glied von gewisser Zahl zu erhalten, nicht mehr und nicht weniger von den successiven ersten Gliedern des einen wie des andern Factors nöthig hat, als die Zahl des verlangten Einheiten in sich schließt. Wer das rte Glied des Products finden will, muß dazu, sobald die Factoren so weit gehn, die r ersten Glieder sowohl des Multiplicand als des Multiplicators haben. Sind unter diesen Gliedern o gewordene, so fallen die Partialproducte weg, welche, sonst aus ihnen gebildet, in

die Zusammenstellung getreten seyn würden, und alsdann kürzen sich die Ausdrücke ab.

Am einfachsten bilden sich die äußersten Glieder des Products, da offenbar die niedrigsten der Factoren, sich multiplizirend, das niedrigste, die höchsten Glieder derselben, auf gleiche Art, das höchste des Products erzeugen müssen. Es ist daraus eine leichte Folgerung, daß allemal das Product eine Form seyn wird, deren Rang hervortritt, wenn man die Ränge seiner Factoren durch Addition verbindet.

Es kann in der Regel für die Coeffizientenberechnung nichts ändern, wenn man Multiplicand und Multiplicator beyde fallend ordnen wollte. Wäre das Schema

$$\overset{0}{a}x^{n} + \overset{1}{a}x^{n\ 1} \ldots + \overset{r}{a}x^{n-r} \ldots + \overset{n}{a}$$
$$\underline{\overset{0}{b}x^{m} + \overset{1}{b}x^{m-1} \ldots + \overset{m-r}{b}x^{r} \ldots + \overset{m}{b}}$$

so würde, wie vorhin, jedes Glied des Products, sobald man, seiner Zahl gemäß, die Potenz der Hauptgröße bestimmt hätte, die in ihm vorkommen muß, seinen Coeffizienten erhalten, wenn man alle Partialproducte zusammenfaßte, die aus zwey Factoren, einem der Art a, dem andern der Art b, so gestiftet würden, daß ihre Indices zusammen den Grad jener im Gliede verlangten Potenz der Hauptgröße ausmachten. Der Ausdruck in allgemeinen Zeichen würde in diesem Falle nur etwas umständlicher. Im Anfangsgliede des Products würde x^{m+n} erscheinen; im r^{ten} nach ihm also x^{m+n-r}. Jetzt würde also $\overset{m+n-r-h}{a} \cdot \overset{h}{b}$. für h jede beliebige ganze Zahl von o an bis $m+n-r$ verstanden, Andeutung aller zu bildenden Partialproducte seyn. Und $\overset{h}{o \ldots (m+n-r)}\Sigma\,(\overset{m+n-r-h}{a} \cdot \overset{h}{b})\;x^{m+n-r}$ würde die Darstellung des r^{ten} nachfolgendes Gliedes seyn. Man hätte dasselbe aus der anfänglichen Betrachtung ableiten können, durch die Bemerkung, daß das r^{te} Glied des Products bey fallender Ordnung und das $m+n-r^{te}$ bey steigender völlig zusammenfallen

müssen. In der That, wenn man in unserer ersten Regel statt r setzt $m + n - r$, so erhält man die zweyte.

Die allgemeinste Form, welche für analytische Zwecke dem Multiplicand und Multiplicator gegeben werden kann, ist die, wo ihre Exponenten arithmetische Progressionen, mit beliebigen Anfangsgliedern, aber durch gleiche Differenzen fortschreitend, seyn mögen. Sind α, β, δ ganz beliebige Zahlen, so wird das Schema dieses Falls:

$$\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots$$

$$\overset{0}{b}x^{\beta} + \overset{1}{b}x^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{b}x^{\beta+r\delta} \ldots$$

Offenbar aber ändert sich dabey in der Regel für die Coeffizientenberechnung durchaus nichts. Sondert man aus der ersten Form den Factor x^{α}, aus der zweyten x^{β}, und nennt man momentan $x^{\delta} = u$, so hat man:

$$x^{\alpha}(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}u \ldots + \overset{r}{a}u^{r} \ldots)$$

$$x^{\beta}(\overset{0}{b} + \overset{1}{b}u^{1} \ldots \quad \overset{r}{b}u^{r} \ldots)$$

Die einfachen gesonderten Factoren geben $x^{\alpha+\beta}$; die compleren eine Form, die mit $\overset{0}{a}\overset{0}{b}$ anhebt und im rten Gliede $\overset{h}{0..r}\Sigma.$ $(\overset{r-h}{a}.\overset{h}{b})u^{r}$ enthält. Hier für u zurücksubstituirt x^{δ}, und den gemeinschaftlichen Factor $x^{\alpha+\beta}$ in die einzelnen Glieder gebracht, hat man als Product eine Form, in der das Anfangsglied $\overset{0}{a}\overset{0}{b}x^{\alpha+\beta}$, in der allgemein, das rte nachfolgende $\overset{h}{0\ldots r}\Sigma(\overset{r-h}{a}.\overset{h}{b})x^{\alpha+\beta+r\delta}$ ist.

Dabey verdient also bemerkt zu werden, daß der Anfangs-Exponent des Products die Summe von den Anfangs-Exponenten der Factoren ist, und daß die folgenden Exponenten eine Progression mit derselben Differenz, wie sie bey jenen herrscht, beobachten; die Regel der Coeffizientenberechnung bleibt ganz wie im ersten und einfachsten Fall.

Wollte man endlich als Factoren zwey Formen annehmen, bey denen die Exponenten der Potenzen in den einzelnen Gliedern keine Progression, worin dieselbe Differenz herrscht, bildeten, so würde man nur im Allgemeinem die einzelnen Producte aus den successiven Theilen des einen Factors in die des andern berechnen, und sie bloß hintereinander stellen, wenigstens eine fernere Zusammenziehung derselben auf keine formelle Vorschrift zurückführen, sondern das Aneinanderreihen und Ordnen der einzelnen Partialproducte der Individualität des vorliegenden Falls überlassen müssen.

Viertes Kapitel.

Division zusammengesetzter Formen.

Auf eben die Art, wie wir in den vorhergehenden Betrachtungen für die Multiplicationen von zwey Formen, die nach Potenzen einer beliebigen Hauptgröße gleichmäßig fortschreiten, allgemeine Regeln gefunden haben, welche es möglich machen, jedes einzelne Glied des Products, dem allgemeinen Gesetze seiner Bildung gemäß, zu bestimmen, muß sich auch bey der Division einer solchen Form durch eine andre, für jedes Glied des dadurch entstehenden Quotienten und übrig bleibenden Restes, eine allgemeine Regel der Entwicklung finden lassen.

Aber es liegt in der Natur der Sache, daß der Gang der Untersuchung hier anders ausfallen wird, als dort. Die Multiplication ist eine ursprüngliche zusammensetzende Operation, die Division hingegen wird als das Umgekehrte von ihr, mithin schon als abgeleitet gedacht.

Das gemeine Divisionsverfahren nimmt ohne Weiteres für jeden Fall, wo Dividend und Divisor Grundformen sind, die Möglichkeit an, auch den Quotienten in ähnlicher Gestalt zu erhalten. Unter dieser Voraussetzung muß ihm der bekannte

Satz: das höchste oder niedrigste Glied eines Products erwächst aus den höchsten oder niedrigsten Gliedern seiner Factoren, gehörig angewandt, dienen, alle einzelnen Theile des Quotienten nach der Ordnung zu finden. Man dividire, nachdem beyde auf gleiche Weise geordnet sind, das erste Glied des Dividend durch das erste des Divisors, und man wird das erste Glied des Quotienten erhalten. Man berechne das Product aus ihm in den ganzen Divisor und ziehe es vom Dividend ab; alsdann hat man ein Stück des Dividend herausgehoben, und für sich der Division unterworfen, folglich einen Theil des Quotienten gefunden. Der übrig bleibende Rest muß auch noch dividirt werden; man verfahre mit ihm, wie mit dem anfänglichen Dividend, und man wird einen neuen Theil des Quotienten erhalten. Auf dieselbe Weise fortschreitend, bekommt man allmälig die successiven Glieder des Quotienten, und findet ihn vollständig, wenn anders der Dividend würklich das Product zweyer nach Potenzen der Hauptgröße geordneter Formen gewesen ist. Im gegentheiligen Falle schließt sich die Operation nicht; es bleibt immer ein Rest zurück, und zeigt eben dadurch die Unmöglichkeit, den Quotienten in der verlangten Form darzustellen.

Indessen fällt die Unvollkommenheit dieses Verfahrens in die Augen und erregt das Bedürfniß genauerer Untersuchung.

I. Recurrirende Entwicklung des Quotienten. Daß der Quotient zweyer nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße auf gleiche Weise fortschreitenden Formen, eine dritte, eben so, wie sie, gebildet seyn werde, darf man gewiß nicht allgemein annehmen, denn es kann nur in seltnen Fällen statt finden. Faßt man hingegen die Frage so: ob es nicht eine, bis zu einem beliebigen Range aufsteigende, Form geben könne, deren Product mit dem Divisor, in allen Gliedern, vom Anfangsgliede an, bis zu dem jenes beliebig zu wählenden höheren Ranges hinauf, völlig identisch mit dem Dividend werden müßte, so steht ihrer Beantwortung keine Schwierigkeit entgegen.

Man nehme unbestimmt eine solche Form als schon gefunden an, wobey also für die Coeffizienten ihrer einzelnen Glieder unbestimmte Zeichen gebraucht werden müssen, berechne ihr Product mit dem Divisor, und setze es innerhalb der Grenzen jenes gewählten Ranges identisch mit dem Dividend. Eine solche Identität zweyer Formen fordert gänzliche Uebereinstimmung aller gleich hohen Glieder, also namentlich der Coeffizienten, die in diesen auf beyden Seiten vorhanden sind. Man wird solcher Gleichungen so viele bekommen, als die Form, welche man für den Quotienten angenommen hatte, Glieder enthält, das heißt so viele, als man in ihr Coeffizienten vorläufig fingirt hatte. Sieht man also diese Coeffizienten als unbekannte Größen an, so hat man eben so viele Gleichungen, jede vom ersten Grade, als unbekannte Größen vorhanden sind; es ist folglich die Möglichkeit gegeben, jede diese unbekannten Größen sicher und ohne Zweydeutigkeit zu bestimmen. Sey allgemein die Andeutung für Dividend, Divisor und Quotient:

$$\frac{\overset{0}{b}+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2\ldots+\overset{n}{b}x^n\ldots}{\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{n}{a}x^n\ldots}=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\ldots+\overset{n}{A}x^n.$$

Sucht man das Product aus Quotient und Divisor, so ist das Anfangsglied desselben bekanntlich $\overset{0}{A}\overset{0}{a}$; allgemein das $n$te Glied $(\overset{n}{A}\overset{0}{a}+\overset{n-1}{A}\overset{1}{a}\ldots+\overset{n-h}{A}.\overset{h}{a}\ldots+\overset{1}{A}\overset{n-1}{a}+\overset{0}{A}\overset{n}{a})x^n$. Identifizirt man das Anfangsglied des Dividend mit dem dieses Products, so erhält man $\overset{0}{A}\overset{0}{a}=\overset{0}{b}$; mithin $\overset{0}{A}=\frac{\overset{0}{b}}{\overset{0}{a}}$; identifizirt man die beyderseitigen $n$ten Glieder, so kommt:

$$\overset{n}{b}=\overset{n}{A}\overset{0}{a}+\overset{n-1}{A}\overset{1}{a}\ldots+\overset{n-h}{A}.\overset{h}{a}\ldots+\overset{1}{A}\overset{n-1}{a}+\overset{0}{A}\overset{n}{a},$$

eine Formel, in welcher man für n allmälig alle ganze Zahlen, von 1 anhebend, zu setzen berechtigt ist.

Sie dient allgemein, um jeden folgenden Coeffizienten für den gesuchten Quotienten zu finden, vorausgesetzt, daß

sämmtliche vorhergehende als schon bekannt angenommen werden dürfen, sobald man sie als Gleichung betrachtet, in welcher der höchste gesuchte Coeffizient als unbekannte Größe angesehn wird, und diesem gemäß transponirt:

$$\frac{\overset{n}{b} - \overset{n-1}{A}\overset{1}{a} - \overset{n-2}{A}.\overset{2}{a} \ldots - \overset{n-h}{A}.\overset{h}{a} \ldots - \overset{1}{A}\overset{n-1}{a} - \overset{0}{A}\overset{n}{a}}{\overset{0}{a}.} = \overset{n}{A}$$

Diese Regel, vermöge deren sich aus den frühern Coeffizienten des Quotienten die successiv folgenden ableiten, ist sehr einfach, und kann sogleich folgendermaßen ausgesprochen werden. Man setze die schon gefundenen Coeffizienten des Quotienten, auch den des Anfangsgliedes mitgenommen, in umgekehrter natürlicher Ordnung, gebe ihnen die des Divisors, mit umgekehrten Zeichen, in natürlicher Ordnung als Factoren bey, füge dazu noch den Coeffizienten aus der Form des Dividend, der eben so hoch ist als derjenige des Quotienten den man sucht, dividire diese Summe durch den Anfangscoeffizienten des Divisors, und addire alle diese Producte, so erhält man den gesuchten nächsthöheren Coeffizienten. Will man die successiven Glieder des Quotienten nach der Reihe erhalten, so ist es nicht möglich eine kürzere und bequemere Regel der Rechnung, als diese, zu geben; sie ist eines einfachen Mechanismus fähig.

Der Verlauf dieser Untersuchung ist besonders darum sehr merkwürdig, weil sie uns das erste Beyspiel eines Verfahrens darbietet, zu welchem sich die Analysis allenthalben genöthigt sieht, wo ihr Operationen vorgeschrieben werden, welche das Umgekehrte von andern directen und ursprünglichen sind. Sie muß alsdann jedesmal, so wie hier, das Gesuchte als schon gefunden annehmen, es in directe Rechnungen verflechten, und rückwärts, durch Gleichsetzung des daraus Entstandenen mit bekannten Formen, Gleichungen gewinnen, aus denen das Angenommene bestimmt werden kann. Alsdann aber entstehn jedesmal ähnliche Beziehungen, wie sie sich vorhin ergaben.

Die Coeffizienten der Form, welche das Resultat der Rechnung seyn soll, werden nicht ursprünglich und independent aus denen der gegebenen Formen ausgedrückt erscheinen; man wird nur Gleichungen, in denen sie mit sich und den gegebenen Größen vermischt vorkommen, erhalten, und in diesen ein Mittel finden, durch Hülfe früherer unter diesen Coeffizienten, allmälig folgende höhere zu berechnen. Mit Recht nennt man dieses Verfahren **recurrirende Bestimmung**. Wir werden eine solche bey den nachfolgenden Untersuchungen in unendlich mannichfaltigen Gestalten wiederfinden *).

II. **Independente Bestimmung des Quotienten.** Aber die bey der Division beabsichtigte Untersuchung ist durch dieses recurrirende Verfahren keinesweges beendigt; den Forderungen der Theorie ist nicht eher Genüge geleistet, als bis wir für jedes einzelne Glied des Quotienten in deutlichen Begriffen anzugeben vermögen, aus was für Gliedern des Dividend und Divisor's, und auf welche Art aus ihnen es sich zusammensetze. Der independente Ausdruck für jedes Glied eines gesuchten Resultats ist immer der höchste Zweck der Analysis,

*) Der gewöhnliche analytische Sprachgebrauch nennt im Allgemeinen eine **Reihe recurrirend**, wenn nach einem bestimmten Gesetze jeder folgende ihrer Coeffizienten aus vorhergehenden berechnet werden kann. Er scheint dabey nur den sehr speciellen Fall der Division vor Augen gehabt zu haben, indem er unbedingt annimmt, daß dieses Gesetz jedesmal darauf zurückkommen müsse, daß mit gewissen, der Ordnung und Größe nach unabänderlich bestimmten Factoren, deren Reihe die **Recursionsscale** genannt zu werden pflegt, die vorhergehenden Coeffizienten in umgekehrter Ordnung multiplicirt werden, damit die Summe dieser Producte den nachfolgenden gebe. Es ist offenbar unschicklich, die Reihe selbst recurrirend zu nennen, weil zufällig ihre Coeffizienten durch Recursion bestimmt werden; die Idee der Recursionsscale paßt nur auf einen individuellen Fall der möglichen Beziehung von Coeffizienten, die derselben Reihe angehören; wir wollen uns also dieser Terminologie im Folgenden enthalten.

sey es auch, daß sie sich bey der Berechnung aller Glieder mit großem Vortheil bewiesener Recursionen unter ihnen bediene.

Die jetzt noch zu lösende Aufgabe würde so im Allgemeinen gefaßt werden können. Man hat gegebene Größen oder Elemente. Es ist von andern die Rede, welche successive Verbindungen aus ihnen in sich schließen. Man kennt diese andern selbst noch nicht, aber man hat eine allgemeine Regel, vermöge deren die Art, wie jede höhere von ihnen durch bestimmte Verbindung der gegebenen Elemente mit den vorhergehenden niedrigeren aus diesen gebildet werden kann, vorgezeichnet ist. Man sucht daraus eine independente Idee ihrer Zusammensetzung aus jenen gegebenen Elementen. Die Beantwortung einer solchen Frage kann oft sogleich auf combinatorischem Wege gelingen. Jede combinatorische Operation fordert gewisse Zusammenstellungen aus gegebenen Elementen. Sie kann auf independentem Wege vollzogen werden; sie kann aber auch recurrirend, so daß man aus niedrigeren oder früheren Verbindungen, Elemente anfügend oder vertauschend, zu höheren fortschreitet, zu Stande kommen. Sobald es sich also bey der recurrirenden Bildung gewisser Größen durch Hinzufügen gegebener Elemente findet, daß man dabey genau nach derselben Ordnung und Regel verfährt, wie bey der Bildung gewisser höherer combinatorischer Formen-Inbegriffe aus andern niedrigern, so hat man entdeckt was man suchte. Jene Größen sind alsdann selbst, in Absicht auf ihre Entstehung aus den gegebenen Elementen, nichts anders als eben solche combinatorische Formen-Inbegriffe, aus diesen Elementen gebildet.

Die Anwendung dieser allgemeinen formalen Regel macht es indessen im vorliegenden Fall nöthig, von einer vereinfachenden Voraussetzung auszugehn. Angenommen daß die Anfangsglieder $\overset{0}{b}$, $\overset{0}{a}$, und also auch $\overset{0}{A}$, $= 1$ seyn sollen, all folgende im Dividend aber, $\overset{1}{b}$, $\overset{2}{b}$ ... $\overset{n}{b}$, sämmtlich $= o$, wi

obige allgemeine Regel der recurrirenden Bestimmung:

$$\overset{n}{A} = (-\overset{1}{a}).\overset{n-1}{A} + (-\overset{2}{a})\overset{n-2}{A} \ldots + (-\overset{h}{a})\overset{n-h}{A} \ldots + (-\overset{n-1}{a})\overset{1}{A} + (-\overset{n}{a})$$

Das Bilden von Variationsformen zu bestimmten Summen, wenn man in größter Allgemeinheit, ohne auf Unterschied in Absicht auf Classen zu sehn, alle diejenigen verlangt, welche der nemlichen Summe angehören, läßt sich (S. 27.) nach einer höchst einfachen recurrirenden Regel vollziehen. Wenn man alle Variationsformen zu den successiven niedrigern Summen schon hat, und, aus ihnen, alle, die der nächsthöheren Summe angehören, ableiten will, so setzt man jedem Inbegriff, der einer gewissen Summe angehört, das Element bey, welches seine Summe zu der neuen geforderten ergänzt, und fügt zuletzt noch allen diesen Verbindungen das Element, als eine besondre Form, zu, dessen Zahl für sich eben die Summe ausmacht. In Zeichen; wenn $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{r}{a} \ldots$ gegebene Elemente; ${}^{n}V$, ${}^{n-1}V, \ldots {}^{2}V$, ${}^{1}V$, Inbegriffe aller möglichen Variationsformen zur Summe n, $n-1, \ldots 2, 1$, bedeuten so ist ${}^{n}V = \overset{1}{a}\,{}^{n-1}V + \overset{2}{a}\,{}^{n-2}V \ldots + \overset{n-2}{a}\,{}^{2}V + \overset{n-1}{a}\,{}^{1}V + \overset{n}{a}$

Offenbar aber stimmt diese Regel der Recursion so unbedingt mit der unter den Coeffizienten unsres Quotienten

$\overset{n}{A} = -\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} - \overset{2}{a}\overset{n-2}{A} \ldots - \overset{h}{a}\overset{n-h}{A} \ldots - \overset{n-1}{a}\overset{1}{A} - \overset{n}{a}$, daß sich die Behauptung von selbst rechtfertigt: die Coeffizienten des Quotienten sind nichts anders als Variationsformen aus den mit umgekehrten Zeichen genommenen successiven Coeffizienten des Divisors als gegebenen Elementen, zu der Summe gehörig, welche die Zahl des jedesmaligen Coeffizienten selbst ausdrückt.

Sollen also für den Quotienten $\dfrac{1}{1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{n}{a}x^n \ldots}$ welcher eine, nach Potenzen der nämlichen Hauptgröße, genau wie der Divisor, fortschreitende Form $1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{n}{A}x^n$.

seyn wird, die Coeffizienten gefunden werden, so nehme man die Coeffizienten des Divisors, in ihrer natürlichen Ordnung, aber mit umgekehrten Zeichen, als Elemente, und bilde aus ihnen Variationsformen zu bestimmten Summen, ohne Rücksicht auf Classen-Unterschiede. Jeder Inbegriff solcher Formen, welcher einer gewissen Summe gehört, die einzelnen Formen als Producte gedacht und durch Addition verbunden, gibt einen Coeffizienten für den Quotienten; die Summe, für welche er berechnet war, stellt den Grad der Potenz von der Hauptgröße vor, womit er sich als Factor verbinden wird. In Zeichen:

$$\frac{1}{1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{n}{a}x^n}=1+{}^1Vx^1+{}^2Vx^2\ldots{}^nVx^n\ldots$$

wenn sich das Zeichen V auf die Elemente $(-\overset{1}{a}), (-\overset{2}{a}), (-\overset{n}{a})\ldots$ bezieht.

Es ist offenbar in diesem Ausdrucke noch eine Abkürzung möglich. Die Variationsformen werden alle aus einer einzigen Reihe von Elementen, $(-\overset{1}{a}), (-\overset{2}{a}), (-\overset{n}{a})$ gebildet. Sie sollen, wenn man sie realisirt, als Producte gedacht werden. Alle Producte, die sich bloß durch abweichende Ordnung der nemlichen Factoren von einander unterscheiden, gelten gleich, und werden nur zusammengezählt. Man braucht also bloß diejenigen Variationsformen, welche durch verschiedenen Inhalt sich als verschiedene zeigen, zu entwickeln, und, statt jede von ihnen zu permutiren, bey jeder zu bemerken, wie oft sie wieder erscheinen würde, wenn man alle möglichen Aenderungen der Folge unter ihren Elementen eintreten lassen wollte. Das heißt kürzer: man erzeuge aus den gegebenen Elementen, als unbedingt wiederholbar gedacht, alle möglichen Combinationsformen, welche, ohne Rücksicht auf Classen-Unterschied, zu der nemlichen bestimmten Summe gehören, und füge, diese Formen aus den Elementen realisirend, jeder ihre

eigne Versetzungszahl bey; dadurch erhält man den Coeffizienten des Quotienten, welcher einer Potenz der Hauptgröße, von dem Grade, welchen jene bestimmte Summe bezeichnet, zugehört. In Zeichen:

$$\frac{1}{1+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2 \ldots +\overset{n}{a}x^n} = 1 + p^1Cx^1 + p^2Cx^2.$$

$+ p^nCx^n \ldots$ wobey sich das Zeichen C auf die additiv umgekehrten Coeffizienten des Divisors $-\overset{1}{a}, -\overset{2}{a}, \ldots -\overset{n}{a}$, in ihrer natürlichen Ordnung bezieht, und alle Combinationsformen, von jeder möglichen Classe, die der jedesmal verlangten Summe angehören, also für ^rC alle von der ersten Classe bis zur rten einschließlich, aus ihnen, als unbedingt wiederholbaren, verlangt.

Auf die independente Erledigung dieses ersten Falles läßt sich nun auch die des zweyten, allgemeineren, zurückführen. Denn, wofern

$$\frac{1}{1+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2 \ldots +\overset{m}{a}x^m \ldots} = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{n}{A}x^n \ldots$$

war, so wird

$$\frac{\overset{0}{b}+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2+\ldots\overset{p}{b}x^p\ldots}{1+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{m}{a}x^m\ldots} = (\overset{0}{b}+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2\ldots+\overset{p}{b}x^p.).$$

$$\left(\frac{1}{1+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2.+\overset{m}{a}x^m\ldots}\right) = (\overset{0}{b}+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2\ldots+\overset{p}{b}x^p)$$

$$(1+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2+\ldots\overset{n}{A}x^n\ldots)$$

Es ist also, um den Quotienten der gegenwärtigen Division zu erhalten, nur noch die Multiplication des im ersten Falle gefundenen Quotienten mit der Form des Dividend zu vollziehn. Die daraus hervorgehende Form wird nach demselben Gesetze, wie der Dividend, in Absicht auf die in ihren einzelnen Gliedern enthaltenen Potenzen der Hauptgröße, gebildet seyn. Ihre Coeffizienten erzeugen sich nach der bekannten Regel,

welche für Producte von zwey gleichmäßig fortschreitenden Formen im Vorhergehenden entwickelt sind. Dem gemäß wird sogleich das Resultat der Untersuchung auf folgende Art ausgesprochen werden können.

Der Quotient $\dfrac{\overset{0}{b} + \overset{1}{b}x^1 + \overset{2}{b}x^2 \,..\, + \overset{p}{b}x^p \,..}{1 + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \,..\, + \overset{m}{a}x^m \,..}$ ist

eine Form von der nemlichen Bildung wie Dividend und Divisor; sein Anfangsglied ist dem des Dividend identisch, $= \overset{0}{b}$; um zu irgend einem folgenden Gliede, wobey Zahl des Gliedes und Grad der darin von der Hauptgröße vorkommenden Potenz, immer zusammenfallen werden, den Coeffizienten zu erhalten, bilde man alle Combinationsformen aus den folgenden Coeffizienten der Divisors, nachdem man ihre Zeichen umgekehrt hat, und sie so als gegebene unbedingt wiederholbare Elemente, in ihrer natürlichen Ordnung, betrachtet, zu den successiven Summen, die bis zur Zahl des geforderten Gliedes, diese mit eingeschlossen, möglich sind, und multiplicire jede mit ihrer Permutationszahl. Man setze allen den Combinationsformen, die zu der nemlichen Summe gehören, den Coeffizienten des Dividends als Factor bey, dessen Zahl mit derjenigen dieser Summe, die Zahl des verlangten Gliedes hervorbringt; zuletzt noch den Coeffizienten des Divisors, dessen Zahl schon für sich ebensoviel beträgt, einzeln, und vereinige alle diese Producte zu demselben Aggregat. In Zeichen: das rte Glied des vorhin angedeuteten Quotienten ist

$$x^r\,(p\,{}^{r}C\overset{0}{b} + p\,{}^{r-1}C\overset{1}{b} + p\,{}^{r-2}C\overset{2}{b} \,..\, + p\,{}^{2}C\overset{r-2}{b} + p\,{}^{1}C\overset{r-1}{b} + 1.\overset{r}{b})$$

wenn sich das Zeichen C auf die additiv umgekehrten Coeffizienten des Divisors, $-\overset{1}{a}, -\overset{2}{a}, -\overset{3}{a} \,..$ als unbedingt wiederholbare Elemente bezieht. Das bereits in der Lehre von der Multiplication gebrauchte Summationszeichen kann auch hier zur Abkürzung dienen, und vermöge seiner zieht sich der Ausdruck des

rten Gliedes für den Quotienten auf $o..\overset{h}{r}\Sigma({}^{r}\dot{-}{}^{h}C\,\overset{h}{b})\,x_r$ zusammen, wobey freylich für Fall $h = r$ dem in sich bedeutungslosen Zeichen ^{o}C der Werth 1 beygelegt werden muß. Diese Regel ist offenbar bey würklicher Berechnung nur dann als brauchbar zu empfehlen, wenn ein einzelnes Glied des Quotienten, herausgerissen aus der Reihe der übrigen, berechnet werden soll. Sobald hingegen die successiven Glieder des Quotienten, vom Anfang an, bis zu einer beliebigen Weite gefordert werden sollten, erscheint das recurrirende Verfahren als ohne Vergleich bequemer und vorzüglicher.

III. Bestimmung des Rests bey der Division. Setzt man die Division bis zu einem dem Range nach bestimmten Gliede des Quotienten fort, so wird in der Regel jederzeit dabey ein Rest übrig bleiben, welcher sich direct bestimmen läßt, sobald der Quotient berechnet ist. Das Product aus dem Quotienten in den Divisor, abgezogen vom Dividend gibt ihn unfehlbar, wobey sich von selbst versteht, daß er mit einem Gliede anhebt, dessen Rang um eines höher ist, als die schon entwickelte Form des Quotienten, da es bey der Berechnung des Quotienten Grundannahme gewesen ist, daß jenes Product bis zu dem Grade, zu welchem der Quotient selbst aufsteigt, mit dem Dividend identisch, folglich soweit der Unterschied zwischen beyden $= o$ seyn muß. Wir bekommen also hier, wenn wir die Coeffizienten des Quotienten als bekannte Größen annehmen wollen, eine Regel für die Berechnung des Restes. Es sey in Zeichen

der Quotient $\overset{o}{B} + \overset{1}{B}x^{1} + \overset{2}{B}x^{2} \,..\, \overset{r}{B}x^{r} \,..$

der Divisor $1 + \overset{1}{a}x^{1} + \overset{2}{a}x^{2} \,..\, + \overset{m}{a}x^{m} \,..$

so ist das Product dieser beyden Formen, vom Grade x^{r+1} an, berechnet, und vom Dividend, $\overset{o}{b} + \overset{1}{b}x^{1} + \overset{2}{b}x^{2} \,..\, + \overset{p}{b}x^{p} \,..$ abgezogen, der gesuchte Rest. Will man also für irgend ein Glied des Restes den Coeffizienten erhalten, so setze man die

successiven Coeffizienten des Quotienten; multiplicire jeden mit dem Coeffizienten des Divisors, dessen Zahl mit der seinigen den Grad derjenigen Potenz der Hauptgröße ausmacht, welche in dem verlangten Gliede vorkommen soll; subtrahire endlich die Summe dieser Producte von dem eben so hohen Coeffizienten des Dividend. In Zeichen: des Restes, welchen die vorhin angedeutete Division lassen wird, vorausgesetzt, daß der Quotient bis zum $r$ten Gliede entwickelt sey, $k$tes würkliches Glied ist $x^{r+k}.[\overset{r+k}{b} - (\overset{0}{B}.\overset{r+k}{a} + \overset{1}{B}.\overset{r+k-1}{a} \ldots \overset{r}{B}.\overset{k}{a})$ oder in schärferer Bezeichnung: $[\overset{r+k}{b} - \overset{b}{o..k}\Sigma(\overset{h}{B}.\overset{r+k-h}{a}..)]\, x^{r+k}$ .. Es hängt offenbar von der Zahl von Gliedern ab, die der Divisor enthält, ob die Menge der Producte, welche sich zu einem Coeffizienten des Rests vereinigen, mehr oder minder beträchtlich seyn soll, so wie, wenn der Divisor und Dividend keine ins Unendliche fortschreitende Formen sind, ihre Anzahl für jedes höhere Glied des Restes geringer werden muß. Ist das Glied $\overset{m}{a}x^m$ das höchste im Divisor, so wird, sobald k größer als m genommen wird, der Ausdruck für das $k$te Glied des Restes bloß $\overset{r+k}{b}.x^{r+k}$ seyn, welches nur dann nicht 0 bedeutet, wenn der Dividend selbst noch ein Glied, das zu dem Range $r+k$ hinaufgeht enthält.

Man darf also sagen: Ist der Quotient bis zum $r$ten folgenden Gliede entwickelt, der Divisor aus m Gliedern nach dem anfänglichen bestehend, so wird, falls der Dividend nicht mehr als $r+m$ Glieder enthält, der Rest eine Form seyn, welche $r+m$ Glieder hat, anhebend mit x^{r+1}, schließend mit x^{m+r}. Ist aber die Zahl der Glieder im Dividend größer als $m+r$, so hat der Rest deren eben soviele als im Dividend nach dem $r$ten vorkommen.

Es könnte scheinen, als wäre die Form, welche bey der letzten Betrachtung dem Divisor gegeben ist, nur particulär

weil wir in seinem Anfangsgliede die Einheit gesetzt haben. Indessen zeigt sich sogleich das Gegentheil durch die Bemerkung, daß sich diese Form auch alsdann, wenn der Divisor im Anfangsgliede einen beliebigen Coeffizienten hätte, sehr bald hervorbringen ließe. Man braucht nur vorläufig alle Glieder im Dividend und Divisor mit eben diesem Coeffizienten zu dividiren; die neuen Formen von beyden werden alsdann unfehlbar unter das angenommene Schema fallen. Eben darum wird man jederzeit berechtigt seyn, wo es im ersten Ansatze des Quotienten nöthig seyn sollte, vorbereitend eine solche leichte Umgestaltung zu verlangen, ehe zur Ausführung der Division geschritten wird.

IV. **Möglichste Generalisirung der Divisionsregel.** Die allgemeinste Gestalt, welche sich für Dividend und Divisor annehmen ließe, wäre die, daß die Exponenten der Potenzen in beyden überhaupt nur durch gleiche Unterschiede fortschritten (eine arithmetische Progression von dem nemlichen Exponenten bildeten). Aber es ist leicht diese Aufgabe auf die vorige zurückzuführen. Es sey, in Zeichen, aus

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta} \ldots}{\overset{0}{a}x^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta} \ldots}$$ der darin geforderte Quotient

zu suchen. Man dividire erst Dividend und Divisor mit der Potenz der Hauptgröße, welche im Anfangsgliede des Divisors steht, und sondre zugleich im Dividend, aus allen Gliedern, als Factor, die Potenz der nemlichen ab, welche alsdann in dessen Anfangsgliede vorkommt

$$x^{\alpha-\beta}\left(\frac{\overset{0}{b} + \overset{1}{b}x^{\delta} + \overset{2}{b}x^{2\delta} \ldots}{\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^{\delta} + \overset{2}{a}x^{2\delta} \ldots}\right)$$

Der abgesonderte Factor hat weiter keinen Einfluß auf die Entwickelung; nur daß er am Ende hinzugefügt werde. Der angedeutete Quotient hingegen hat die Gestalt, welche in der vorigen einfachen Betrachtung angenommen ist, sobald man,

für den Augenblick, $x^\delta = u$ setzen will, wodurch er sich in $\frac{\overset{0}{b} + \overset{1}{b}u + \overset{2}{b}u^2 ..}{\overset{0}{a} + \overset{1}{a}u + \overset{2}{a}u^2 ..}$ verwandelt. Aus ihm entsteht, eine, dem Gesetz ihrer Bildung nach, durch das vorhergehende hinlänglich bekannte Form $= \overset{0}{B} + \overset{1}{B}u + \overset{2}{B}u^2 .. + \overset{r}{B}u^r$, und ein Rest, sobald man diese abbricht, von gleichfalls bekannter Form und Bildung $\overset{1}{R}u^{r+1} + \overset{2}{R}u^{r+2} +$. Setzt man für u seinen Werth x^δ zurück, und multiplicirt man mit dem abgesonderten Factor $x^{\alpha-\beta}$ das Resultat der anderweitigen Division, so erhält man Quotient und Rest vollständig, deren gänzliche independente Bildung also folgendermaßen geregelt werden kann. Wenn aus den Formen $\frac{\overset{0}{b}x^\alpha + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta} ..}{\overset{0}{a}x^\beta + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta} ..}$ der Quotient gefordert werden sollte, so ist derselbe eine Form, in welcher die Exponenten nach der nemlichen Progression fortgehn, so daß der des Anfangsgliedes die Differenz der gleichnamigen im Dividend und Divisor ist. In Zeichen: das Anfangsglied enthält $x^{\alpha-\beta}$ das r^{te} nach ihm $x^{\alpha-\beta+r\delta}$.

Was die Coeffizienten des Quotienten betrifft, so würde die independente Bestimmung derselben nach folgender allgemeinen Regel geschehn.

Man dividire zuvörderst alle in den beyden gegebenen Formen enthaltene durch den anfänglichen des Divisors. Die dadurch erhaltenen folgenden Coeffizienten des Divisors setze man mit umgekehrten Zeichen, als unbedingt wiederholbare Elemente, $\frac{-\overset{1}{a}}{\overset{0}{a}}, \frac{-\overset{2}{a}}{\overset{0}{a}}, \frac{-\overset{3}{a}}{\overset{0}{a}}, ..$ und bilde aus ihnen Inbegriffe von Combinationsformen, jede einzelne mit ihrer Permutationszahl als Factor versehn, so wie auch die Elemente der

einzelnen Formen als Factoren auf einander bezogen, die Producte aber als Theile verbunden werden müssen. Man sehe jeden Inbegriff aller Combinationsformen, die der nemlichen Summe angehören, als eine geschlossene Größe an, und entwickele deren mit p^1C, anfangend, und zu successiv höheren Summen in natürlicher Ordnung fortschreitend, soviele, als man Glieder für den Quotienten nach dem anfänglichen verlangt. Man füge jedem solchen Inbegriff als Factor den Coeffizienten des veränderten Dividends bey, dessen Zahl mit der des Inbegriffs (oder, was einerley ist, der Summe wozu er gehört) soviel ausmacht als die Zahl des Gliedes im Quotienten, wozu der Coeffizient verlangt wurde, und setze als besondern Theil, den Coeffizienten des Dividends mit in die Summe, dessen Zahl schon für sich eben die Höhe hat. In Zeichen: das rte Glied des oben geforderten Quotienten ist

$$x^{\alpha-\beta+r\delta}\left(\frac{\overset{r}{b}}{a}+\frac{\overset{r-1}{b}}{å}p^1C+\frac{\overset{r-2}{b}}{å}p^2C\,.+\frac{\overset{2}{b}}{å}p^{r-2}C+\frac{\overset{1}{b}}{å}p^{r-1}C+\frac{\overset{0}{b}}{å}p^rC\right)$$

oder, in kürzerer Bezeichnung, $o\overset{h}{..}r\Sigma\,(p^h\overset{r-h}{C b})x^{\alpha-\beta+r\delta}$

wobey C sich auf die Elemente $-\frac{\overset{1}{a}}{å}..,-\frac{\overset{2}{a}}{å}..,-\frac{\overset{3}{a}}{å}..,$ bezieht. Es versteht sich von selbst, daß das Anfangsglied des Quotienten mit dem des Dividends $\frac{\overset{0}{b}}{å}$ identisch ist.

Was den Rest einer solchen Division betrifft, so setzt er den Quotienten als entwickelt voraus, und ist, falls derselbe bis zum rten Gliede berechnet, angenommen wird, eine Form, die mit $x^{\alpha-\beta+(r+1)\delta}$ anhebt und durch dieselbe Progression der Exponenten als Dividend und Divisor fortläuft. Für irgend ein Glied in ihm findet sich der Coeffizient, wenn man jeden des Quotienten mit dem des Divisors, dessen Index mit dem seinigen die Zahl des geforderten Gliedes ausmacht, multiplizirt, die Summe dieser Producte berechnet, und von dem

eben so hohen Coeffizienten des Dividend abzieht. In Zeichen, das kte Glied des Restes, falls der schon gefundene Quotient $= \overset{0}{B}x^{\alpha-\beta} + \overset{1}{B}x^{\alpha-\beta+\delta} + \ldots$ seyn soll, ist

$$x^{\alpha-\beta+(r+k)\delta}\left(\overset{r+k}{b} - [\overset{r}{B}\overset{k}{a} + \overset{r-1}{B}\overset{k+1}{a} \ldots + \overset{0}{B}\overset{r+k}{a}]\right)$$

Mit der Anzahl aller Glieder des Restes bleibt es, wie bey der früheren einfacheren Voraussetzung.

Was endlich bey dieser allgemeinen Form für die Aufgabe der Division das recurrirende Verfahren betrifft, vermöge dessen man jeden folgenden Coeffizienten des Quotienten aus den vorhergehenden berechnen kann, so erscheint es eben so einfach, wie in den vorhergehenden Fällen. Wenn man den Quotienten als schon gefunden annimt,

$$\frac{\overset{0}{b}x^{\alpha} + \overset{1}{b}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{b}x^{\alpha+2\delta}}{\overset{0}{a}x^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta}} = \overset{0}{B}x^{\alpha-\beta} + \overset{1}{B}x^{\alpha-\beta+\delta} \ldots \overset{r}{B}x^{\alpha-\beta+r\delta} \ldots$$

alsdann das Product aus dem Divisor und Quotienten, bis zu dem Range des höchsten Gliedes in dem letzteren berechnet, und vom Dividend abgezogen, $= 0$ setzt, so ist das allgemeine Schema der daraus hervorgehenden Gleichungen:

$\overset{r}{b} - (\overset{r}{B}\overset{0}{a} + \overset{r-1}{B}\overset{1}{a} + \ldots \overset{1}{B}\overset{r-1}{a} + \overset{0}{B}\overset{r}{a}) = 0$, woraus, mit einer leichten Verwandlung, folgt:

$$\overset{r}{B} = \frac{\overset{r}{b} - [\overset{r-1}{B}\overset{1}{a} + \overset{r-2}{B}\overset{2}{a} \ldots \overset{1}{B}\overset{r-1}{a} + \overset{0}{B}\overset{r}{a}]}{\overset{0}{a}}$$

Man berechne also, um einen Coeffizienten von beliebiger Zahl für den Quotienten zu erhalten, alle Producte aus den nächstvorhergehenden Coeffizienten eben desselben, in die des Divisors, deren Index mit dem ihrigen die Zahl des gesuchten Coeffizienten ausmacht. Den Inbegriff dieser Producte ziehe man von dem eben so hohen Coeffizienten des Dividend ab, und dividire den Rest durch den Anfangs-Coeffizienten des Divisors. Diese Regel gilt unbedingt, selbst für den anfäng-

lichen Coeffizienten des Quotienten, für welchen $B = \frac{\overset{0}{b}}{\overset{0}{a}}$, hätte man, wie es bey bestimmten Formen allemal geschehn kann, durch vorläufige Division den Anfangs-Coeffizienten des Divisors in die Einheit verwandelt, so würde sich die Formel der Recursion, durch das Wegfallen des Divisors in ihr, vereinfachen, und, wenn man vorläufig die Zeichen aller folgenden Glieder im Divisor ändern wollte, ganz auf die vorhergehende zurückkommen, welches beydes für jeden bestimmten Fall anzurathen seyn mögte, weil sich der Ausdruck der Regel selbst dadurch zusammenzieht.

Es verdient noch besonders bemerkt zu werden, daß, sobald der Dividend und Divisor beyde aus einer bestimmten Zahl gegebener Glieder bestehn, der Quotient in zwey ganz verschiedenen Gestalten dargestellt werden kann. Man ordne beyde steigend, wo also die Differenz unter den Exponenten ihrer successiven Glieder, das δ der allgemeinen Formel, positiv seyn wird, und der Quotient wird gleichfalls eine steigende Form, mit derselben Progression der Exponenten, werden. Ordnet man hingegen, wie es eben so gut gestattet ist, Dividend und Divisor beyde fallend, wobey also die Differenz ihrer successiven Exponenten, δ, eine negative Zahl werden muß, so wird der Quotient auch eine fallende Form, ähnlicher Art wie sie. Die Berechnung der Coefficienten geschieht in beyden Fällen nach der nemlichen combinatorischen Regel; es braucht wohl kaum erinnert zu werden, daß sie das eine Mal durchaus andere Resultate geben muß, als das andre Mal, weil sich die Bedeutung des combinatorischen Index gänzlich verändert, je nachdem man einen steigenden, oder einen fallenden Quotienten haben will.

Sollten übrigens Sprünge und Lücken in den Formen des Dividend und Divisors vorhanden seyn, so würde vielleicht eine Abkürzung für den einzelnen Fall, aber schwerlich eine allgemeine Regel des Verhaltens möglich seyn.

Fünftes Kapitel.

Multiplication möglichst einfacher Factoren des ersten Grades sowohl identischer, (Binomischer Lehrsatz), als verschiedener.

Die allgemeine Theorie der Multiplication darf nicht bey zwey Factoren stehn bleiben, sondern muß sich zu der Voraussetzung erheben, daß deren beliebig viele gegeben seyn mögen, sämtlich gesetzmäßig gebildet, und hat zu bewürken, daß ihr Product in ähnlicher Gestalt aufgestellt werde. Um mit den einfachsten Fällen, die es da, wo mehr als zwey Factoren zusammentreten, geben kann, anzuheben, mögen die Factoren aus denen ein Product gebildet werden soll, nur vom ersten Grade, mithin zweytheilig, und selbst unter dieser Voraussetzung möglichst im Ausdruck vereinfacht, mithin von der Form $a + x$ seyn, übrigens aber in beliebiger Anzahl genommen werden. Man verlangt das Product solcher Factoren, so entwickelt, daß es in einer nach Potenzen der Hauptgröße gesetzmäßig fortschreitenden Form hervortrete.

I. Binomischer Lehrsatz.

Die eben gemachte Voraussetzung erhält ihre einfachste Gestalt, wenn man alle Factoren der Form $a + x$, die zu einem Producte verbunden werden sollen, völlig identisch setzt, so daß also eine Potenz, deren Exponent eine beliebige und positive Zahl ist, gesetzmäßig entwickelt werden soll.

A. Independente Entwickelung.

Man hat, die Aufgabe des binomischen Satzes von combinatorischer Seite angesehn, mehrere, unter einander identische Reihen, deren jede zwey Elemente in sich faßt, und soll aus ihnen alle Variationsformen bilden. Hier findet der leichteste Fall der Art Statt, wo man, ohne weitere Rücksicht, für alle Reihen einen gemeinschaftlichen Index einführen darf; und unmittelbar aus

seinen Elementen die Variationsformen zusammensetzen kann. Dabey wird für die gegenwärtige Voraussetzung die Regel der Ableitung die bequemste seyn, welcher gemäß aus dem gemeinschaftlichen Index der gegebenen Reihen, seine Elemente als unbestimmt wiederholbar gedacht, erst alle möglichen Combinationsformen abgeleitet werden, und nachher jede von diesen Formen auf alle mögliche Arten permutirt erscheint. Denn da die gleichhohen Glieder der hier angenommenen Reihen durchaus dieselben sind, die Elemente der Formen aber als Factoren zusammengestellt werden, und geänderte Folge der Factoren auf die Größe des Products keinen Einfluß hat, so müssen hier alle die Formen, welche durch bloßes Permutiren andrer entstehn, als identisch betrachtet, und im Zusammennehmen als Wiederholungen des nemlichen Products nur gezählt werden, damit von jeder bekannt werde, wie oft sie vorkommt. Dies erreicht sich aber sogleich dadurch, daß man aus den Elementen des gemeinschaftlichen Index nur diejenigen Complexionen würklich entwickelt, die sich durch geänderten Inhalt von einander unterscheiden, und, statt jede von ihnen würklich zu permutiren, ihr bloß als Factor die Permutationszahl beyfügt, welche der Menge und Art der in ihr vorkommenden Elemente zukommen wird.

Diese Combinationsformen aber, da nur zwey, unbedingt wiederholbare, Elemente vorhanden sind, und der Grad der Classe wozu sie gehören sollen, durch die Menge der gegebenen Reihen vorgeschrieben ist, bilden sich, der Idee einer Rangfolge unter ihnen selbst zufolge, auf eine sehr einfache Weise. Die niedrigste enthält lauter Elemente, deren jedes dem ersten des gegebenen gleich ist; jede folgende entsteht, wenn man aus der vorhergehenden ein erstes Element herauswirft, um dafür ein zweytes wieder an den Platz zu setzen, als wodurch hier allein eine Erhöhung geschehen kann. Weiß man also nur von einer solchen Form, die wievielste nach der anfänglichen sie seyn soll, so kennt man ihren ganzen Bau. Sie hat so

viele zweyte Elemente in sich, als ihre Zahl angibt, und daneben so viele erste, als nöthig sind, um diese Zahl zu derjenigen zu ergänzen, welche die Menge der vorhandenen Reihen, oder die Classe der zu bildenden Formen ausdrückt.

Jetzt also kann das Gesetz einer solchen Multiplication vollständig ausgesprochen werden. Soll man eine zweytheilige Größe $(a + x)$ auf eine vorgeschriebene Potenz von ganzem und positivem Exponenten erheben, so bilde man eine Reihe einzelner Producte, jedes so viele Factoren enthaltend, als der Grad der Potenz fordert. Im anfänglichen müssen alle Factoren dem ersten Theile der gegebenen Größe gleich seyn, (a^n), in den successiv folgenden muß sich bey jedem Schritte einer von diesen Factoren verlieren, und dafür ein andrer, welcher dem zweyten Theile der gegebenen Größe gleich ist, wieder an die Stelle treten, so daß, allgemein, ein folgendes Product von bestimmter Zahl, eine Potenz des ersten Theils enthalten wird, in deren Exponenten so viele Einheiten an der anfänglichen Menge fehlen, als die Zahl des Products anzeigt, daneben aber als Factor eine Potenz des zweyten Theils in sich schließen muß, deren Exponent eben diese Zahl des Products selbst ist. (Das r^{te} Glied von $(a + x)^n$ wird $a^{n-r}.x^r$ enthalten). Jedes von diesen Producten muß so oft gesetzt werden, als seine Factoren, wenn sie Elemente einer Permutation wären, Versetzungsformen erlauben würden. Man sieht also auf diese Weise von selbst eine Reihe einzelner Producte hervortreten, die in regelmäßiger Folge successive Potenzen der angenommenen Hauptgröße in sich schließen, und deren Inbegriff das geforderte Resultat in vorgeschriebener Form darbieten muß.

Was die Versetzungszahl betrifft, die hier als Factor oder Coeffizient in den Gliedern einer Potenz von einer zweytheiligen Größe vorkommt, und in so fern **Binomialcoeffizient** zu heissen pflegt, so sind zwar die Gesetze ihrer Bildung bekannt,

indessen läßt sich dabey noch eine, Bemerkung verdienende, Abkürzung anbringen. Die Producte enthalten alle gleichviel Factoren, die Zahl der Elemente also, welche permutirt werden sollen, ist immer die nemliche. Wären daher alle diese Elemente verschieden, so bliebe die Permutationszahl immer dieselbe; ein Product aller ganzen Zahlen von 1 an, bis zur Zahl der vorhandenen Elemente hinauf: $(n.(n-1)\ldots.1)$. Aber da in jedem Producte gleiche Factoren oder Elemente liegen, so muß sie noch Veränderungen erleiden; für jede Zahl gleicher Elemente, die unter den gegebenen vorkommen, hat man sie durch die Permutationszahl zu dividiren, welche einer solchen Menge zukommt. Das anfängliche Product, so wie das allerlezte, enthalten lauter gleiche Factoren; für sie also wird die Permutationszahl, weil Dividend und Divisor sich aufheben, die Einheit. Alle übrigen Producte aber enthalten gleiche Factoren von zweyerley Art; für sie also muß die volle Permutationszahl durch zwey kleinere dividirt werden, welche den kleineren Mengen von untereinander gleichen Elementen zugehören, die in der Form enthalten sind. (In Zeichen: das rte unter den Producten ist: $a^{n-r}.x^r$. Seine Versetzungszahl also: $\left(\frac{n.(n-1)\ldots.1}{(n-r)\ldots.1.r\ldots1}\right)$ Nun aber ist in einer größeren Permutationszahl jede kleinere enthalten. Nun wird also wenigstens die eine von jenen beyden kleineren sogleich gegen die volle Permutationszahl heben können, wenn auch die Division mit der andern nur angedeutet werden kann. Alsdann gehn die Factoren der vollen Permutationszahl vom höchsten nur soweit herab, bis die Reihe dieser, allmälig sich um eine Einheit verringernden, Zahlen, an den höchsten Factor jener kleineren aufzuhebenden Permutationszahl, kommt; und brechen, ohne diesen noch mit in sich aufzunehmen, auf einmal ab. Zu ihrem Producte gehört als Divisor alsdann bloß noch die zweyte der kleineren Permutationszahlen, die sich nur in der Wirklichkeit gleichfalls muß heben lassen, von der

aber im Allgemeinen nicht mehr angegeben werden kann, wie es geschehn muß. An sich ist es völlig gleichgültig, welche von den beyden kleineren Versetzungszahlen, gegen eben so viele, den ihrigen gleiche, Factoren der vollen, gehoben werden soll; es ist indessen am gebräuchlichsten, es diejenige seyn zu lassen, welche wegen der unter einander gleichen Elemente oder Factoren von der Art des ersten Theils, als Divisor gesetzt werden muß (In Zeichen: wenn das rte unter den Producten, in welche sich $(a+x)^n$ entwickeln wird, $a^{n-r}x^r$, und dem gemäß der anfängliche Ausdruck seiner Versetzungszahl, die ihm als Factor beygegeben werden muß, $\frac{n.(n-1)\ldots.1}{(n-r)\ldots1.r\ldots1}$ ist, so hebt man die der Menge gleicher Factoren von der Art a, d. h. der Zahl $n-r$, zugehörige Versetzungszahl $(n-r)\ldots.1$, durch Division würklich, so daß die obere nur noch von n bis auf $(n-r+1)$ herabgeht, die folgenden Factoren aber, von $n-r$ an bis 1 aus ihr wegfallen; alsdann bleibt im Divisor bloß die zweyte Versetzungszahl, die wegen der gleichen Factoren von der Art x in ihm vorkam, d. h. $r\ldots.1$, ungeändert stehn. Es wird also der Factor, welcher dem Producte $a^{n-r}.x^r$ beygegeben werden muß, nach dieser Abkürzung, $\frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots.r}$, indem es offenbar völlig gestattet ist, die Ordnung der Factoren im Nenner umzukehren. Es könnte aber auch eben so gut, wenn man die zweyte Permutationszahl heben, die erste stehn lassen wollte, $\frac{n.(n-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots n-r}$ seyn; beyde Ausdrücke sind in sich identisch und es hängt von Umständen ab, ob der eine oder der andre bequemer im Gebrauche seyn soll.

Um alle diese Entwicklungen in eine mechanische Regel zusammenzufassen, kann man sich folgendermaßen ausdrücken. Um eine zweytheilige Größe $(a+x)$ auf die Potenz eines bestimmten Exponenten, der hier als ganze positive Zahl ge-

dacht wird (n), zu erheben, bilde man eine Reihe von Gliedern, in welcher das Anfangsglied nichts weiter als eine eben so hohe Potenz des ersten Theils (a^n) enthält, jedes folgende (rte) aber eine Potenz des ersten Theils, deren Exponenten an jener anfänglichen Höhe schon so viele Einheiten abgehn, als die Zahl des Gliedes in sich faßt, (a^{n-r}) nebst einer Potenz des zweyten Theils, deren Exponent gerade soviel Einheiten enthält, als die Zahl des Gliedes (x^r). Jedes Glied bekomme einen bestimmten Coeffizienten. Dieser muß jedesmal ein Bruch seyn, dessen Zähler und Nenner Producte aus benachbarten ganzen Zahlen sind. Im Zähler fängt sich das Product immer mit dem Grade der vorgeschriebenen Potenz selbst, als höchstem Factor, an, und geht, durch Factoren, die sich successiv um eine Einheit verringern, so weit fort, bis es zu einem Factor herabgekommen ist, der vom Grade der Potenz so viele Einheiten schon verloren hat, als die um eine Einheit verringerte Zahl des Coeffizienten andeutet (von n bis auf $n-(r-1)$ herabgekommen ist). Im Nenner beginnt das Product mit der Einheit, und geht, durch alle successiv größeren Zahlen, bis auf die des Coeffizienten selbst, welche den letzten seiner Factoren abgibt, (von 1 bis r).

Wollte man bloß in Zeichen reden, so drückte sich die ganze Vorschrift so aus. Es ist $(a+x)^n$ eine Reihe, deren Anfangsglied a^n, deren rtes Glied $\frac{n.(n-1)\ldots[n-(r-1)]}{1.2\ldots r} a^{n-r}.x^r$ ist, und man setze nur für r alle Werthe von 1 an, durch die successiven ganzen Zahlen hindurch, um aus diesem unbestimmten Ausdrucke alle einzelnen Glieder, vom ersten nach dem anfänglichen an, bis zum letzten, welches das nte nach ihm seyn wird, vollständig zu entwickeln.

Für den Fall wo man die zu potenzirende Form des ersten Grades nicht steigend, sondern fallend geordnet hätte, mithin

das Resultat auch fallend erhalten wollte, bedarf es keiner neuen Betrachtung; man braucht in der obigen nur x und a zu verwechseln.

In der Folge sollen die Coeffizienten, welche in den Gliedern der berechneten Potenz eines Binomiums vorkommen, als Größen von bekannter Bildung, durch ein einfaches Zeichen angedeutet werden. $^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ soll den Coeffizienten des rten Gliedes in der nten Potenz einer zweytheiligen Größe, und also soviel als $\frac{n \, . \, (n-1) \ldots [n-(r-1)]}{1 \, . \, 2 \ldots r}$ anzeigen. Der häufige Gebrauch dieser Zahlen rechtfertigt eine solche Abkürzung. Sie kommen bey den verschiedenartigsten Betrachtungen vor. So geben sie z. E. die Anzahl der Combinationsformen, die aus einer gegebenen Anzahl unwiederholbarer Elemente, den Inbegriff einer bestimmten Classe ausmachend, erzeugt werden können. Es ist im zweyten Capitel pag. 17. gezeigt, daß aus n Elementen, zur rten Classe, eine Menge von Combinationsformen möglich sind, die durch $\frac{1 \, . \, 2 \ldots n}{1 \, . \, 2 \ldots (n-r), \; 1 \, . \, 2 \ldots r}$ vollständig ausgedrückt wird. Dies ist aber das gegenwärtige $^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}$.

Es mögen noch einige Beziehungen unter ihnen, welche auch bey sehr vielen andern Größen-Verknüpfungen wichtig sind, hier angeführt werden.

1. Es folgt aus ihrer Entstehung, daß zwey solche Binomialcoeffizienten, sobald sie nur in der vollständigen Reihe, welche alle, zu der nemlichen Potenz gehörige, in sich schließt, gleich weit vom Anfang und Ende abstehn, völlig gleich unter einander seyn werden. (In Zeichen: $^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{n-r}{\mathfrak{B}}$). Dies bringt bey der würklichen Berechnung aller, zu einer solchen Potenz gehörigen, Glieder den Vortheil, daß, sobald man über die Hälfte zu gelangen beginnt, die Coeffizienten der folgenden Glieder aus den schon vorhandenen der vorhergehenden unmittelbar abgenommen werden können.

2. Jeder folgende Binomialcoeffizient enthält den vorhergehenden als Factor in sich, und hat im Zähler wie im Nenner nur einen Factor mehr als dieser, und zwar den letzten, welcher, dem ursprünglichen Formationsgesetze gemäß, im Zähler und Nenner bey ihm vorkommt: $\overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}} = \overset{r-1}{{}^{n}\mathfrak{B}} \cdot \left(\frac{n-(r-1)}{r}\right)$.

3. Nicht bloß unter den Coeffizienten der nemlichen Potenz, sondern auch unter denen, die zu Potenzen successiver Grade gehören, findet eine nahe Verwandschaft Statt. Zwey Binomialcoeffizienten einer gewissen Potenz, die unmittelbar auf einander folgen, geben, zusammenaddirt, einen Binomialcoeffizienten der nächsthöheren Potenz, dessen Zahl so hoch ist, als die des letzten unter den beyden, welche sich zu ihm vereinigten. (In Zeichen: $\overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}} + \overset{r+1}{{}^{n}\mathfrak{B}} = \overset{r+1}{{}^{n+1}\mathfrak{B}}$). Der Beweis dieser Behauptung kann sehr leicht durch würkliche Addition geführt werden. [Es ist $\overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1)\ldots[n-(r-1)]}{1.2\ldots r}$

$$\overset{r+1}{{}^{n}\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1)\ldots.[n-(r-1)](n-r)}{1.2\ldots r.(r+1)}.$$

Beyde Brüche müssen, ehe man sie addiren kann, auf einerley Benennung gebracht werden. Dazu ist bloß nöthig, den ersten im Zähler und Nenner mit $(r+1)$ zu multipliciren. Ist dies geschehn, so haben die Zähler der gleichbenannten Brüche die Factoren $n.(n-1)\ldots[n-(r-1)]$ gemein; der erste hat nur $(r+1)$ eigenthümlich, der zweyte nur $(n-r)$. Diese beyden eigenthümlichen Factoren geben, durch Addition vereinigt, $(r+1)+(n-r) = (n+1)$; diese Summe, mit den vorher abgesonderten, beyden Theilen gemeinschaftlichen, Factoren multiplicirt, $(n+1)\,n\ldots.[n-(r-1)]$, als den Zähler des neuen Bruchs, worin man offenbar ohne Aenderung des Werths den letzten Factor auch

durch $(n + 1 - r)$ ausdrücken kann. Dazu den gemeinschaftlichen Nenner als solchen wieder gefügt, bekommt man $\frac{(n+1)\, n \ldots (n+1-r)}{1 \,.\, 2 \ldots (r+1)}$, welches, dem festgestellten Gesetze gemäß, der entwickelte Werth von $^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$ ist. Käme es darauf an, für die successiven Potenzen eine Tabelle der Binomialcoeffizienten zu entwerfen, so würde dieser Satz dazu sehr brauchbar seyn. Der Coeffizient des Anfangsgliedes in jeder Potenz ist die Einheit; alle übrigen aber findet man durch successive Addition von zwey benachbarten Coeffizienten der unmittelbar vorhergehenden Potenz *).

4. Noch eine andre leicht abzuleitende und sehr brauchbare Beziehung ist die: daß alle Binomialcoeffizienten, die zu derselben Potenz gehören, in eine Summe gezogen, jedesmal eine Potenz der Zahl 2 hervorbringen, dem Grade nach so hoch, als die, welcher die Coeffizienten angehörten. (In Zeichen: $1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} + \ldots\ldots {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} = 2^{n}$). Der Beweis dieses Satzes ergibt sich auf folgende Art. Alle Glieder der entwickelten Potenz einer zweytheiligen Größe, zusammengerechnet, geben den Werth dieser Potenz, was auch die beyden Theile der potenziirten Größe seyn mögen. Nimt man also an, daß der erste Theil, so wie der zweyte, jeder die Einheit ist, so

---

* Der Anfang einer solchen Tabelle sähe so aus:

Grad der Potenz	Zahl des Coeffizienten 0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Das Anfangsglied jeder Horizontalreihe ist 1, jedes folgende ist durch Addition des darüber stehenden zu dem diesem in seiner Reihe unmittelbar vorhergehenden erzeugt.

beträgt die zweytheilige Größe eigentlich die Zahl 2, und jene geforderte Potenz von ihr ist eine Potenz der Zahl 2. Aber in der Reihe von Gliedern, welche die Entwicklung dieser Potenz darstellt, verschwinden bey dieser Annahme die Potenzen des ersten sowohl als des zweyten Theils, denn jede Potenz der Einheit ist selbst wieder die Einheit, und kann als Factor weggelassen werden. Es bleiben also in den Gliedern bloß die Coeffizienten stehn, und ihre Summe ist es allein, welche den Werth jener berechneten Potenz ausmacht. [In Zeichen:

Wenn allgemein $(a+x)^n = a^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} . a^{n-1} . x^1 + \dots {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}} . x^n$ ist, und man, für a und x, die Einheit an die Stelle setzt,

so findet sich $(1+1)^n = 2^n = 1 + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} + \dots {}^n\overset{n}{\mathfrak{B}}$].

B. **Recurrirender Ausdruck des binomischen Satzes.** Den kürzesten Ausdruck nimt die Regel des binomischen Satzes an, wenn man ihren independenten Ausdruck in einen recurrirenden umsetzt. Wenn man

$$(x+a)^n = x^n + \overset{1}{A}x^{n-1} + \overset{2}{A}x^{n-2} \dots + \overset{r-1}{A}x^{n-(r-1)} \dots + \overset{r}{A}x^{n-r} \dots$$

setzt, so ist, dem bereits Bewiesenen gemäß:

$\overset{r-1}{A} = {}^n\overset{r-1}{\mathfrak{B}} . a^{r-1}$ und ebenso $\overset{r}{A} = {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} . a^r$.

Es ist ferner schon dargethan, daß: ${}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} = \left(\frac{n-(r-1)}{r}\right) {}^n\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$

Es ist also $\frac{\overset{r}{A}}{\overset{r-1}{A}} = \left(\frac{n-(r-1)}{r}\right) . a$, mithin $\overset{r}{A} = \overset{r-1}{A} \left(\frac{n-(r-1)}{r}\right) a$

Man kann also allgemein sagen, daß bey der Entwicklung von $(x+a)^n$ aus jedem vorhergehenden Gliede das nächstfolgende erhalten werde, wenn man dieses mit dem Grade der in ihm enthaltenen Potenz von x multiplicirt, alsdann ein x in ein a verwandelt (wodurch die vorherige Potenz von x im Range um 1 niedriger, die von a um 1 höher wird), und endlich durch den Grad der zuletzt entstandenen Potenz von a wieder dividirt. Diese Regel wird allmälig angewendet,

von x^n zu $\frac{n a x^{n-1}}{1}$, von da zu $\frac{n.(n-1)}{1.2} a^2 x^{n-2}$ u. s. w. durch alle Glieder der bekannten binomischen Entwicklung führen, und bey dem Gliede worin $a^n . x^{n-n} = \overset{n}{a} x^0$ vorkommt, weil von da an ihr gemäß der Factor o in alle folgenden treten müßte, von selbst den Schluß der Entwicklung nachweisen.

In dem Ausdruck der Regel würde sich für den Fall der umgekehrten Anordnung wenig ändern. Ist

$(a+x)^n = a^n + \overset{1}{A} x^1 + \overset{2}{A} x^2 \ldots + \overset{r-1}{A} x^{r-1} + \overset{r}{A} x^r \ldots$ so

ist nach dem independenten Gesetze: $\overset{r-1}{A} = {}^n\overset{r-1}{\mathfrak{B}} a^{n-(r-1)}$

und $\overset{r}{A} = {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} . a^{n-r}$, mithin $\frac{\overset{r-1}{A}}{\overset{r}{A}} = \frac{n-(r-1)}{r.a}$, oder

$\overset{r}{A} = \left(\frac{n-(r-1)}{r}\right) \frac{\overset{r-1}{A}}{a}$. Es bliebe also dieselbe Regel wie im ersten Fall, um aus jedem vorhergehenden Gliede das folgende abzuleiten, nur daß dabey a und x mit einander verwechselt werden müßten, oder sofern bloß von den Coeffizienten die Rede wäre, statt dortiger Multiplication mit a hier Division durch a zu verlangen seyn würde, während der Factor $\frac{n-(r-1)}{r}$ in beyden Fällen derselbe bleibt.

II. Producte aus beliebig vielen verschiedenen Factoren des ersten Grades.

Wir nehmen jetzt beliebig viele zweytheilige Factoren an, die, um verschiedene der einfachsten Gestalt zu seyn, jeder im ersten Theile eine besondre, beliebige, Größe, im zweyten hingegen alle die erste Potenz der Hauptgröße enthalten mögen. (In Zeichen, wir nehmen als Factoren $\alpha + x$, $\beta + x$, $\nu + x$, u. s. w.). Wir wollen untersuchen, ob für eine, nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitende

Form, ihr Product seyn werde, und nach welcher Regel jedes beliebige Glied desselben gebildet sey.

Man bezeichne die ersten Glieder der Factoren sämtlich durch 1, die zweyten durch 2, und bilde aus den Elementen 1, 2, alle möglichen Variationsformen. Diese werden sich, wie immer, entweder durch verschiedenen Inhalt, oder durch geänderte Folge der Elemente von einander unterscheiden. Wo man nur zwey Elemente in seiner Gewalt hat, da kann Aenderung des Inhalts nur dadurch geschehn, daß man ein erstes Element herauswirft, um ein zweytes dafür an die Stelle zu setzen. Alle die Formen also, welche verschiedenen Inhalt besitzen, unterscheiden sich durch die Menge der zweyten Elemente die sie enthalten; alle diejenigen, welche nur durch geänderte Folge der Elemente von einander verschieden sind, enthalten natürlich auch die nemliche Menge zweyter Elemente. Nun aber bedeutet das zweyte Element immer dasselbe, nemlich die erste Potenz der Hauptgröße. Alle die Formen also, welche die nemliche Menge von zweyten Elementen in sich schließen, enthalten eine und ebendieselbe Potenz der Hauptgröße, und gehören zu einem Gliede des Products zusammen. Man verfährt also hier am bequemsten, wenn man erst aus den gegebenen Elementen, als unbedingt wiederholbar gedacht, alle Combinationsformen bildet, von denen die niedrigste bloß erste Elemente, jede folgende ein erstes Element weniger, und dafür ein zweytes mehr enthalten wird, und nachher jede von diesen Formen auf alle mögliche Arten permutirt. Alle die Formen, welche durch Permutation aus einander entstanden sind, gehören zu demselben Gliede; alle hingegen, wobey eine andre Combination gemacht worden ist, gehören zu verschiedenen Gliedern des Products.

Es mögen also zuerst die verschiedenen möglichen Combinationsformen vollständig abgeleitet seyn; hernach aber jede von diesen auf alle mögliche Arten permutirt erscheinen. Bey dem Beziehn dieser combinatorischen Formen auf die würklich

gegebenen Reihen werden alsdann noch wesentliche Abkürzungen möglich. Zuerst deswegen, weil man sich um die Bedeutung der zweyten Elemente nicht weiter zu bekümmern braucht. Stehn verlangter Maßen alle die Formen zusammen, welche die nemliche Anzahl von zweyten Elementen enthalten, so kann man ein für allemal diese zweyten Elemente aus ihnen allen absondern; sie bedeuten ein Product aus lauter gleichen Factoren, deren jeder die Hauptgröße ist, stellen also eine Potenz derselben dar, die gemeinschaftlicher Factor aller jener Formen ist, und ein für allemal als solcher aus ihnen abgesondert werden darf, um ihrer anderweitigen Summe als Factor wieder vorgesetzt zu werden. Nachdem dies geschehn ist, enthalten alle jene Formen nur noch erste Elemente; die eine zwar an Zahl eben so viele, als die andre, aber die eine nicht in den nemlichen Stellen wie die andre. Und jedes erste Element bekommt seine Bedeutung aus der Stelle, worin es steht, denn sie weist ihm die Reihe an woraus es genommen werden soll, und es hat in einer andern Reihe einen andern Werth. Die Natur der Permutationen bringt es mit sich, daß die permutirten Elemente allmälig in alle möglichen Stellen neben einander rücken, welche in den Formen überhaupt vorkommen. Wenn also alle Permutationsformen, worin eine bestimmte Zahl erster Elemente liegen, vollständig vorhanden sind, so erscheinen in ihnen diese ersten Elemente allmälig auf allen möglichen Stellen, welche die Form gestattet, so daß es das eine Mal nicht dieselben Stellen sind, welche sie besetzen, als das andre Mal. Das heißt also: man wird, bey der Beziehung jener Formen auf die gegebenen Reihen, zwar immer dieselbe Menge erster Theile aus ihnen als Factoren zusammenstellen, aber diese ersten Theile werden das eine Mal aus andern Reihen genommen seyn, als das andre Mal. Immer dieselbe Menge erster Elemente nehmen, aber sie allmälig in alle möglichen Stellen rücken lassen, bedeutet also soviel, als: immer gleichviele aus den ersten Elementen der gegebenen Reihen

zusammensetzen, aber sie dabey auf alle mögliche Arten aus verschiedenen Reihen nehmen. Diese Operation kann kürzer gefaßt werden. Man setze bloß die ersten Glieder der gegebenen zweytheiligen Größen als eine besondre Reihe von Elementen hin; aus ihr auf alle mögliche verschiedene Arten eine bestimmte Menge von Elementen zusammenstellen, heißt Combinationen unwiederholbare Elemente zu einer vorgeschriebenen Classe bilden; eine Operation wofür die Regel vorher ausführlich entwickelt sind. Dem gemäß kann also das Gesetz für die Erzeugung eines Products aus den angenommenen zweytheiligen Factoren folgendermaßen ausgesprochen werden. Man stelle eine Form auf, in derem Anfangsgliede noch keine Potenz der Hauptgröße vorkommt, in deren folgenden Gliedern aber die successiven Potenzen eben derselben, allemal von der nemlichen Höhe, wie die Zahl des folgenden Gliedes, erscheinen, so daß, im lezten und höchsten, eine Potenz, deren Grad der Anzahl vorhanden Factoren gleichkommt, gesetzt werde. Die Coefficienten dieser Glieder bilden sich aus den ersten Theilen der angenommenen Factoren. Sie sind Combinationen aus diesen, als nicht wiederholbar angenommenen Größen; jeder von ihnen ist ein Inbegriff aller Combinationsformen, die zu einer bestimmten Classe gehören, die Elemente der einzelnen Formen als Factoren eines Products, die Formen selbst als Theile eines Ganzen gedacht. Was für eine Classe von Combinationsformen einem gewissen Gliede angehöre, wird sogleich dadurch bestimmt, daß der Grad der Classe, und die Zahl des Glieds, oder, was mit der letzteren einerley ist, der Exponent der Potenz der Hauptgröße, welche in diesem Gliede vorkommt, zusammengenommen die Zahl ausmachen müssen, welche die Menge der vorhandenen zweytheiligen Factoren ausdrückt. (In Zeichen. Es sollen die Factoren: $(\alpha + x)$, $(\beta + x)$, $(\gamma + x) \ldots (\nu + x)$ mit einander multiplicirt werden; das Product wird eine Form seyn, die mit einem Gliede, worin x^0 vorkommt, anhebt, dann in den

folgenden Gliedern allmälig x^1, x^2, u. s. w. im lezten x^n enthalten wird. Um die Coeffizienten zu bilden, sehe man die Größen α, β, γ, ... ν, als Elemente einer eigenen Reihe an, woraus Combinationen gebildet werden sollen, und es wird der Coeffizient des Anfangsgliedes, worin x^0 vorkommt, $\overset{n}{C}$; der des ersten, x^1 enthaltenden $\overset{n-1}{C}$; allgemein des rten nach dem anfänglichen, worin x^r vorkommt, $\overset{n-r}{C}$ seyn, das allerlezte aber, in welchem x^n erscheint, wird 1 zu seinem Coeffizienten haben. Zusammengezogen: es ist $(\alpha+x).(\beta+x).(\gamma+x)\ldots\ldots(\nu+x) = \overset{n}{C}x^0 + \overset{n-1}{C}x^1 + \overset{n-2}{C}x^2 \ldots\ldots + \overset{n-r}{C}x^r \ldots\ldots + 1\,x^n$, wenn sich das Zeichen der Combination auf die Reihe α, β, γ, ...ν, bezieht). Daß man die Factoren des ersten Grades, und dem gemäß auch das Product, eben so gut auch hätte fallend anordnen können, bedarf wohl keiner Erinnerung.

Vermöge dieser Regel sind wir im Stande, die Erzeugung eines Products aus Factoren des ersten Grades, auf die leichteste combinatorische Arbeit, Combination unwiederholbarer Elemente zurückzuführen, und jedes einzelne Glied desselben ohne alle Mühe anzugeben. Käme es nur auf ein einzelnes Glied an, so würde nur eine Combinationsclasse aus einer Reihe gegebener Elemente gefordert, und in diesem Falle würde das coordinirende Verfahren bey der Ableitung der einzelnen Formen das zweckmäßigste seyn. Wollte man aber das ganze Product mit allen seinen Coeffizienten vollständig erhalten, zu welchem Zwecke alle Combinationsclassen aus den gegebenen Elementen vollständig gebildet werden müssen, so wäre ohne Zweifel das subordinirende, welches von den Formen einer gewissen Classe zu denen der nächsthöheren aufsteigt, das zweckmäßigste. Es ließe sich dieses leicht auf einen höchst bequemen Mechanismus zurückbringen. Aber Rechnungen solcher Art sind nicht so häufig, daß sie einen besondern Algorithmus verdienten.

III. Zweyte Ableitung des binomischen Satzes.

Wenn nicht die große Wichtigkeit des binomischen Satzes eine ursprüngliche Betrachtung als besonders zweckmäßig erscheinen ließe, so hätte man ihn kürzer als Specialfall, enthalten unter der Regel für Producte aus verschiedenen Factoren der Form $(\alpha + x)$, sogleich ableiten können, so wie sie selbst nur Particulärfall einer höheren Regel ist. Ist ein Product aus n solchen Factoren $(\alpha + x)(\beta + x) \ldots (\nu + x)$ $= \overset{n}{C} + \overset{n-1}{C} x \ldots + \overset{n-r}{C} x^r \ldots + x^n$ wobey $\alpha, \beta, \ldots \nu$, die Elemente der Combinationen abgeben, und werden alle diese Elemente, vorher verschieden, jetzt identisch, jedes $= \alpha$, so ist jede Combinationsform ein Product aus lauter gleichen Factoren, also eine Potenz von α, und der Grad ihrer Classe bestimmt die Zahl derselben, oder den Exponenten jener Potenz von α. Alle Formen derselben Classe stellen also die nämliche Potenz von α dar, und die Anzahl aller Formen, welche in der ganzen Classe liegen, gibt an, wie oft diese Potenz vorkomme. So wird $\overset{n}{C} = \alpha . \beta \ldots \nu = \alpha^n$, allgemein jede Form in $\overset{n-r}{C}$ wird α^{n-r}, und solcher Producte wird $\overset{n-r}{C}$ soviele enthalten, als $\frac{1.2 \ldots n}{1.2 \ldots (n-r).1.2 \ldots r} = {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}$ oder ${}^n\overset{n-r}{\mathfrak{B}}$ anzeigt, mithin $\overset{n-r}{C}$ sich jetzt in ${}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} \alpha^{n-r}$ umsetzen, und so: $(\alpha + x)^n = \alpha^n \ldots + {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} \alpha^{n-r} x^r \ldots + x^n$ hervorgehn, welches die Formel des binomischen Satzes ist.

Sechstes Kapitel.

Von der Multiplication zusammengesetzter Formen im Allgemeinen.

Die allgemeine Aufgabe: mehrere verschiedene, aber nach Potenzen der nämlichen Hauptgröße fortlaufende Formen mit einander zu multipliciren, hat im Ganzen weniger Umständlichkeit, als particuläre Fälle; eben weil die Unbestimmtheit der Formen keine näheren Modificationen der allgemeinen Regel gestattet. Der Gang des bey ihr anzuwendenden combinatorischen Verfahrens wird mehr oder weniger einfach seyn, je nachdem in den zusammengesetzten Factoren mehr oder weniger Uebereinstimmung in Absicht auf die gleichförmige Regelmäßigkeit ihres Baus stattfindet

Will man von dem Einfachsten dieser Art ausgehn, so setze man mehrere Formen, die in ihrem ersten Gliede sämmtlich die 0te Potenz der Hauptgröße enthalten, und nun regelmäßig in ihre folgenden Glieder die successiv höheren aufnehmen, so daß also in jeder die Zahl eines beliebigen Gliedes mit dem Grade der darin von der Hauptgröße vorkommenden Potenz zusammenfällt. Alsdann tritt offenbar die Regel in unmittelbare Anwendung, welche im zweyten Kapitel zur analytischen Begründung des Variirens zu bestimmten Summen gegeben worden ist. Das gesuchte Product wird eine Form, die in ihrem ersten Gliede gleichfalls die 0te Potenz der Hauptgröße enthält, in ihren folgenden Gliedern allmälig durch die nächsthöheren Potenzen fortschreitet, so daß die Zahl des folgenden Gliedes, zugleich den Grad der in ihm enthaltenen Potenz angibt; die Coeffizienten der Glieder sind Variationsformen zu der Summe, welche die Exponenten ihrer Potenzen darstellen, gebildet aus den Reihen von Elementen, welche die

Coeffizienten der sich multiplicirenden Formen in ihrer natürlichen Ordnung darbieten. In Zeichen: es mögen m Reihen vorhanden seyn, wovon $\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ überhaupt den Bau vorstellt; das Product wird eine Form werden, deren Anfangsglied ${}^{0}\overset{m}{V}x^0$, in welcher überhaupt das rte nachfolgende Glied ${}^{r}\overset{m}{V}x^r$ ist, die Variationsformen als Producte aus den Coeffizienten der gegebenen Factoren, als reellen Elementen, die dem gemeinschaftlichen Index zum Grunde liegen, gedacht, und alle die, welche zu derselben Summe gehören, durch Addition mit einander vereinigt.

Der Fall, wo alle zum Producte zu vereinigenden Factoren von der Form $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ sind, ist offenbar als Specialfall im vorigen enthalten, in welchem man, für ihn, nur $\overset{0}{a} = 0$ anzunehmen hat. Indessen ist es kürzer, zu bemerken, daß alle Variationsformen der mten Classe, aus den Elementen $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \ldots$ gebildet zu einer geringeren Summe als m gehörig, das Element $\overset{0}{a}$ enthalten müssen, also sämmtlich wegfallen, wenn dieses $= 0$ gesetzt wird, während die zur Summe m und höheren, reelle Formen aus $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ erzeugt enthalten können. In diesem Falle wird also das niedrigste reelle Glied des Products ${}^{m}\overset{m}{V}x^m$, allgemein das rte nach ihm ${}^{m+r}\overset{m}{V}x^{m+r}$.

Alles kommt also, bey würklicher Ausführung einer solchen Arbeit, auf die Bildung jener Variationsformen zu vorgeschriebenen Summen an. Will man nur ein einzelnes Glied des Products, also nur eine Gruppe von Variationsformen, die einer individuellen Summe gehören soll, so läßt sich, ohne überflüssige Weitläuftigkeit, für die Entwicklung der einzelnen Formen kein andres Verfahren, als das coordinirende,

oben beschriebene, anwenden. Bey ihm ist es nothwendig, für die Reihen einen gemeinschaftlichen Index einzuführen, aus dessen Elementen die Formen zu bilden, und die durch ihr Nebeneinanderstehn angedeutete Multiplication der Größen, wovon sie Stellvertreter waren, würklich vorzunehmen, um zuletzt die gefundenen Producte in eine Summe zu bringen. Sollen hingegen mehrere Glieder des Products nach ihrer natürlichen Ordnung entwickelt werden, so gewährt das recurrirende Verfahren, in der Ableitung der ihnen als Coeffizienten gebührenden Inbegriffe von Variationsformen, wesentliche Abkürzung. Es gibt mancherley combinatorische Recursionen zwischen Variationsformen, die zu niedrigeren Summen und niedrigeren Classen gehören; es ist aber nur eine einzige darunter für unsern arithmetischen Zweck brauchbar, das heißt so beschaffen, daß sie uns nicht bloß behülflich wird, die Andeutung der Art, wie höhere Coeffizienten berechnet werden müssen, abzuleiten aus den Andeutungen für die Berechnung niedriger Coeffizienten, sondern in der That ein Mittel darbietet, aus schon gefundenen Werthen früherer Coeffizienten, die Werthe späterer abzuleiten. Diese Recursion lehrt uns, aus den Inbegriffen von Variationsformen, die in einer niedrigern Classe den successiven Summen angehören, den Betrag aller derjenigen finden, welche in einer nächsthöheren Classe zu einer gewissen Summe gehören werden. Man setzt den schon berechneten Inbegriffen, die in der vorhergehenden Classe zu successiv folgenden Summen gehören, jedem das Element der neuen Reihe, die sich mit den vorigen verbinden soll, bey, dessen Zahl mit der Summe, die sich in jenem Inbegriffe dargestellt hat, die verlangte Summe voll macht. Es ist nicht nöthig bey diesem Verfahren weiter zu verweilen, denn es ist kein andres, als das in der gemeinen Regel des Multiplicirens vorgeschriebene.

Wir können nun unsre Betrachtungen über die Multiplication von Ausdrücken, die sich gleichmäßig nach successiven

Potenzen einer gemeinschaftlichen Hauptgröße gebildet haben, insofern noch erweitern, daß wir in ihrem ersten Gliede nicht eben die erste Potenz, in den folgenden die allmälig immer nur um eine Einheit höher werdenden setzen. Es mag allgemein die Potenz im ersten Gliede jede beliebige seyn, die in den folgenden Gliedern durch beständiges Hinzukommen einer unveränderlichen, übrigens willkührlichen, zweyten Größe sich erzeugen, kürzer, die Exponenten der Potenzen mögen irgend eine arithmetische Progression darstellen. In Zeichen: der Ausdruck mag die Gestalt

$$\overset{0}{a}x^{\alpha}+\overset{1}{a}x^{\alpha+\delta}+\overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta}+\ldots\overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta}+\ldots$$

haben, wobey α und δ nach Belieben ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn darf. Ist nur diese Gestalt für alle Factoren die nemliche, so erhält sich, mit einer geringen Modification, die ganze vorige Regel der Multiplication. Man sondre in jedem der gegebenen Ausdrücke die Potenz, welche er im ersten Gliede enthält, als Factor ab, und setze ihn ihrem Inbegriff als gemeinschaftlichen wieder vor, wodurch man $x^{\alpha}(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^{\delta}+\overset{2}{a}x^{2\delta}\ldots+\overset{r}{a}x^{r\delta}..)$ erhält. Alsdann erscheinen die Grade der Potenzen, die in den Gliedern des aus Theilen zusammengesetzten Factors liegen, als successive Vielfache derjenigen, welche der erste Theil enthält, so daß, wenn man, die letztere für den Augenblick als eine einfache Hauptgröße ansehn, in Zeichen $x^{\delta}=u$ setzen wollte, jeder von den complexen Factoren, für sich betrachtet, in die anfängliche Grundform, $\overset{0}{a}+\overset{1}{a}u+\overset{2}{a}u^{2}..+\overset{r}{a}u^{r}+\ldots.$ zurückfallen würde. Für das Product aus solchen Factoren aber haben wir die vollständige Regel entwickelt. Man braucht also nur diese Regel beyzubehalten, in ihrem Resultate für die einstweilig eingeführte Hauptgröße deren anfänglichen Werth wieder zurückzusetzen, $u=x^{\delta}$, und die Glieder des Products, mit den aus den Factoren anfangs abgesonderten Potenzen der Hauptgröße, zuletzt noch sämmtlich zu multipliciren. So entspringt

folgende allgemeine Regel. Das Product mehrerer Ausdrücke, die von einer beliebigen Potenz der Hauptgröße ausgehn, und in denen die Exponenten nach derselben arithmetischen Progression fortlaufen, ist ein Ausdruck, in welchem das erste Glied die Summe aller der Exponenten, die in den ersten Gliedern der Factoren vorkommen, als den seinigen enthält; in welchem die folgenden Exponenten nach der nämlichen Progression, wie die in den Factoren fortschreiten; in welchem endlich die Coeffizienten Inbegriffe von Variationsformen seyn werden, deren Grad die Zahl der gegebenen Factoren, deren Summe die Zahl des Gliedes wozu sie gehören sollen, ausdrücken wird. Es versteht sich, daß die Indices der successiven Coeffizienten der Factoren die Elementen-Reihen darstellen, woraus sich Variationsformen bilden; daß die durch sie angedeuteten reellen Elemente mit einander multiplicirt, die Producte selbst aber durch Addition verbunden werden müssen. In Zeichen. Wenn mehrere Reihen, wie $\overset{0}{a} x^{\alpha} + \overset{1}{a} x^{\alpha+\delta} + \ldots + \overset{r}{a} x^{\alpha+r\delta}$

$$\overset{0}{b} x^{\beta} + \overset{1}{b} x^{\beta+\delta} + \ldots + \overset{r}{b} x^{\beta+r\delta}$$

$$\overset{0}{c} x^{\gamma} + \overset{1}{c} x^{\gamma+\delta} + \ldots + \overset{r}{c} x^{\gamma+r\delta}$$

gegeben sind, so wird ihr Product mit $x^{(\alpha+\beta+\gamma\ldots)}$ anheben, und im rten Gliede nach dem anfänglichen $x^{(\alpha+\beta+\gamma\ldots)+r\delta}$ enthalten. Ist m die Zahl der vorhandenen Factoren, so wird $\overset{m}{{}^{r}V}$ der Coeffizient des rten Gliedes seyn, so daß sich V aus den Reihen $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \ldots \overset{r}{a}, \ldots$

$$\overset{0}{b}, \overset{1}{b}, \ldots \overset{r}{b}, \ldots$$

$$\overset{0}{c}, \overset{1}{c}, \ldots \overset{r}{c}, \ldots$$

angedeutet durch den gemeinschaftlichen Index 0, 1, .. r, zu bilden hat.

Die beschwerlichste Arbeit tritt ohne Zweifel alsdann bey der Multiplication ein, wenn die zusammengesetzten Factoren,

woraus ein Product gebildet werden soll, in Absicht auf die Exponenten der in ihren einzelnen Gliedern vorkommenden Potenzen, ungleichförmigen Bau besitzen. Sind die Progressionen dieser Exponenten in den verschiedenen Factoren gänzlich verschieden, so ist an keine Vereinigung der Partialproducte, welche die Multiplication geben wird, im Allgemeinen zu denken. Ist aber die Progression der Exponenten in allen Factoren dieselbe, und fehlen nur hin und wieder einzelne Glieder dieses oder jenes Ranges in ihnen, so bleibt es zwar im Allgemeinen bey den vorigen Regeln. Aber es würde eine überflüssige Weitläuftigkeit geben, wenn man das Product zuerst so berechnen wollte, als wenn alle seine Factoren in gänzlicher Vollständigkeit ihrer einzelnen gleich hohen Glieder vorhanden wären; zuletzt wieder weglassend, was als nicht vorhanden angesehn werden dürfte, weil eins oder das andre der Elemente, woraus es sich zusammensetzen sollte, als $= 0$ betrachtet werden müßte. Es entsteht also die Frage, ob sich nicht aus mehreren gegebenen Reihen, deren jede einen besondren Index erfordert, weil in ihr Elemente fehlen oder vorhanden sind, die in andern vorkommen oder vermißt werden, alle möglichen Variationsformen zu einer beliebig vorgeschriebenen Summe bilden lassen? Man kann diese Formen entweder independent, oder durch Recursion finden. Im ersten Falle würde man genöthigt seyn, vorausgesetzt daß die Variationsformen unter einander geschrieben werden, über jede Stelle die Elemente der Reihe, woraus diese Stelle besetzt werden soll, vertical über einander zu setzen. Uebrigens würden die Regeln für die Ableitung der einzelnen Formen die vorigen bleiben; es müßte bloß noch die Bedingung, nur solche Elemente in eine Stelle zu setzen, die sich in der Reihe der über dieser Stelle stehenden fänden, hinzugefügt werden. Unter den recurrirenden Methoden, die sich für die Ableitung der Variationsformen bey diesen Umständen angeben ließen, ist für die würkliche Berechnung keine brauchbar, als die, welche

sich in dem gemeinen Multiplicationsverfahren von selbst beobachtet findet, deren Regel also noch besonders zu entwickeln sehr überflüssig seyn würde.

Die allgemeine Regel für die Bestimmung der Gestalt, welche das Product aus beliebig angenommenen zusammengesetzten Factoren erhalten muß, läßt insofern eine Umkehrung zu, als man in den Fall kommen kann, für jede willkührlich angenommene Potenz der Hauptgröße zu fragen, in dem wievielsten Gliede des Products sie erscheinen werde. Man ziehe den Grad der Potenz, welchen das Anfangsglied des Products enthalten muß, von dem jener angenommenen ab; der Rest, durch die Differenz der in den Exponenten der successiven Glieder von den Factoren herrschenden arithmetischen Progression dividirt, gibt die verlangte Zahl des problematisch gedachten Gliedes.

Es verdient, als eine, in manchen Fällen brauchbare, in den vorhin entwickelten bestimmten Regeln enthaltene, allgemeine Bemerkung noch besonders hervorgehoben zu werden, daß bey einem Producte aus mehreren regelmäßigen Formen, der Coeffizient jedes Gliedes zwar allerdings aus den Coeffizienten mehrerer, in den Factoren liegender Glieder zusammengesetzt wird, aber daß zu seiner Bildung nur soviele von den ersten Coeffizienten der Factoren beytragen können, als seine eigene Zahl Einheiten enthält. Diese Bemerkung ist unter andern in allen den Fällen von Erheblichkeit, wo man durch anderweitige Entwicklung die Factoren erst ableiten muß, aus denen ein Product erzeugt werden soll, weil vermöge ihrer vorgeschrieben wird, wie weit man in der Entwicklung der Factoren zu gehn braucht, wenn die Zahl der Glieder bestimmt ist, welche für das Product berechnet werden sollen. Denn wofern allgemein, aus den Elementen $0, 1, \ldots r$, gebildet $r\overset{m}{V}$ die Andeutung der Coeffizienten im $r$ten Gliede ist, so wird in keiner einzelnen Variationsform ein höheres Element

als r selbst erscheinen können, allerdings aber, wenn man von der ersten dieser Formen, welche in allen andern Stellen lauter o, und in der letzten r enthält, zu nächsthöheren fortschreitet, werden in diesen die niedrigeren Elemente allmälig sowohl in der letzten als in andern Stellen erscheinen.

Siebentes Kapitel.

Der polynomische Lehrsatz für ganze, positive Exponenten, in independenter und recurrirender Form.

Es ist zwar nur eine Specialisirung der allgemeinen Multiplicationsregel, vermöge deren die Aufgabe, beliebig viele untereinander gleiche vieltheilige Formen mit einander zu multipliciren, oder ein Polynomium auf die Potenz eines ganzen und positiven Exponenten zu erheben, erledigt werden kann. Indessen verdient sie, wegen ihrer folgenreichen Wichtigkeit, die genaueste und vielseitigste Betrachtung.

Zwar würde das gemeine Multiplicationsverfahren, die gegebenen Factoren allmälig zum Producte zusammenziehend, das Endresultat unfehlbar zu Stande bringen, und darf als ein dazu führender Mechanismus bezeichnet werden. Es ist indessen weder ein eigentlich independentes, noch ein eigentlich recurrirendes Verfahren in strengen analytischen Sinne, und reicht deswegen für die Zwecke der Analysis nicht hin.

I. Independente Entwicklung des polynomischen Satzes.

A. Ursprüngliche Form desselben.

Was die independente Entwicklung des Geforderten: $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{r}{a}x^r \ldots)^n$ betrifft, so läßt sich eine solche sogleich darauf zurückbringen, daß auch hier, wie

immer, wo sich mehrere ursprüngliche Grundformen multipliciren, die Coeffizienten des Products nichts anders als Variationsformen seyn können, die sich aus denen der Factoren gebildet haben, alle aus der Classe, welche die Anzahl der vorhandenen Factoren bestimmt, jeder einzelne alle Formen in sich schließend, die zu derjenigen Summe gehören, welche den Exponent der Potenz von x bezeichnet, die in dem geforderten einzelnen Gliede des Products herrschen soll. Es braucht nur hinzugefügt zu werden, daß in dem Falle, wo die gegebenen Reihen identisch sind, diejenigen Variationsformen, die sich nur durch geänderte Folge der in ihnen enthaltenen Elemente unterscheiden, Producte bezeichnen, die nur geänderte Ordnung der nemlichen Factoren darbieten, mithin im Zusammenfassen, als immer das Nemliche darstellend, nur zusammengezählt werden müssen. Es ist also, zu großer Abkürzung, in solchem Falle gestattet, nur diejenigen Formen zu bilden, welche, der geforderten Classe und Summe angehörig, wirkliche Verschiedenheit des Inhalts haben, insofern folglich als Combinationsformen, aus dem gemeinschaftlichen Index erzeugt, erscheinen, und alsdann jeder derselben ihre eigne Permutationszahl als Factor beyzufügen. Ins künftige soll, wenn C, wie bisher, Inbegriffe gewisser Combinationsformen andeutet, $p\,C$ anzeigen, daß jeder dieser Formen, als Factor, die Zahl beygegeben werde, welche ausdrückt, wie viele Permutationen die in der Form zusammengestellten Elemente gestatten.

Wenn also vorhin, allgemein, für das Product aus n verschiedenen Reihen, jede von der Form $\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots.$, der Ausdruck: ${}^{0}\overset{n}{V} + {}^{1}\overset{n}{V}x^1 + \ldots . {}^{r}\overset{n}{V}x^r \ldots .$ zur Regel diente, so wird jetzt für $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + .. + \overset{r}{a}x^r \ldots)^n$ das Resultat durch: $p^{0}\overset{n}{C} + p^{1}\overset{n}{C}x^1 + p^{2}\overset{n}{C}x^2 \ldots . + p^{r}\overset{n}{C}x^r \ldots .$ gehörig entwickelt ausgedrückt werden können, wobey $\overset{0}{a} ..,\ \overset{1}{a} ..$

$\overset{2}{a} \ldots\ldots \overset{r}{a} \ldots$, die Elemente sind, aus deren Indices die verlangten Combinationsformen gebildet werden müssen.

Es mag beyläufig bemerkt werden, daß in dieser Regel auch der Fall enthalten ist, wo $\overset{0}{a} = 0$ wäre, die zu potenzirende Form also eigentlich $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ seyn würde. Sobald $\overset{0}{a}$ in dem anfänglichen Ansatze o wird, fallen alle Combinationen der $n$ten Classe, die zu einer geringeren Summe als n gehören, weil in jeder von ihnen unter den Elementen die zu ihr zusammentreten $\overset{0}{a}$ vorkommen muß, als Producte die den Factor o enthalten, gänzlich weg, während alle folgenden, der Summe n und höheren angehörend, weil für sie, auch wenn $\overset{0}{a}$ gänzlich wegfällt, aus den übrigen Elementen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ Formen der $n$te Classe gebildet werden können, fortfahren, etwas Reelles zu bedeuten. Man wird also, als Specialfall der Grundformel:

$$(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^n = {}^{n}p\overset{n}{C}x^n + {}^{n+1}p\overset{n}{C}x^{n+1} \ldots + {}^{n+r}p\overset{n}{C}x^{n+r} \ldots$$

erhalten; so daß alsdann von $\overset{0}{a}$ durchaus keine weitere Rede zu seyn braucht, wofern nur die Combinationsformen, welche sich aus den übrigen durch 1, 2, 3 ... angedeuteten wiederholbaren Elementen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots$ bilden lassen, gehörig zum Ansatz kommen.

Es kommt also offenbar in jedem Fall die ganze Rechnung auf Bildung von Combinationsformen zu bestimmten Summen und Permutationszahlen zurück, wofür die Fundamente der Combinationslehre, die nöthigen Regeln darbieten.

Uebrigens ändert die allgemeinste Annahme, in Absicht auf die Exponenten der Potenzen in der Grundform, an welcher operirt werden soll, nichts in der Regel für die Coeffizientenberechnung. Sollte $(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots)^n$

berechnet werden, so brauchte man nur zuvörderst in der Grundform den, allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen, Factor x^{α} aus ihr zu söndern, und würde sogleich: $x^{n\alpha}(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^{\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{r\delta} \ldots)^{n}$. Der letzte complexe Factor, $x^{\delta} = u$ gesetzt, wird: $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}u^{1} \ldots + \overset{r}{a}u^{r} \ldots)^{n}$. Dies ist aber die bereits behandelte Form, für welche sich als Werth ${}^{0}p\overset{n}{C} + {}^{1}p\overset{n}{C}u^{1} + \ldots + {}^{r}p\overset{n}{C}u^{r}$ bereits ergeben hat. Jedem ihrer Glieder den Factor $x^{n\alpha}$ beygegeben, und für u zurücksubstituirt x^{δ}, kommt $(\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots)^{n} = {}^{0}p\overset{n}{C}x^{n\alpha} + {}^{1}p\overset{n}{C}x^{n\alpha+\delta} \ldots + {}^{r}p\overset{n}{C}x^{n\alpha+r\delta} \ldots$ wo sich offenbar im independenten Ausdruck der Coeffizienten, so wie derselbe sich nach der Zahl des Gliedes bestimmt, welchen er angehören soll, nichts geändert hat.

Und so erscheint die erste Vorschrift für die Potenziirung eines gesetzmäßigen Polynomiums, den Exponenten der zu berechnenden Potenz als ganze positive Zahl angenommen, höchst einfach. Sie ergibt eine neue gesetzmäßige Form, welche in ihrem niedrigsten Gliede eine Potenz der Hauptgröße führt, deren Exponent herauskommt, wenn man den Exponenten im Anfangsgliede der zu potenziirenden Grundform mit dem Grade der verlangten Potenz multiplicirt; die Exponenten der Potenzen in den folgenden Gliedern beobachten dieselbe Progression, wie die in den successiven Gliedern der Grundform. Jeder Coeffizient ist bestimmt durch die Zahl des Glie... er angehören soll. Aus denen der Grundform, ... Indices 0, 1, 2, ... r, angedeutet, alle Combi... en einer Classe bildend, welche der Grad der ver... tenziirung anzeigt, dabey sämmtlich der Summe ... welche die Zahl des verlangten Coeffizienten be... alle diese Formen, mit ihren Permutationszahlen ... rend, wird man jeden derselben erhalten, mithin

jedes einzelne Glied des Resultats zur independenten Bestimmung bringen.

Es ist wohl nicht überflüssig zu bemerken, daß man, um einen Coeffizienten der gesuchten Potenz zu erzeugen, allemal so viele von den ersten Coeffizienten der zu potenziirenden Grundform braucht, als die Zahl des geforderten Einheiten hat, um daraus Producte zu bilden und in einen Inbegriff zu sammeln, daß aber der höchste Coeffizient der Grundform nur in einem dieser Producte, und zwar nur einmal als Factor erscheinen kann. Wird $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^{1} \ldots + \overset{r}{a}x^{r} \ldots)^{n}$ berechnet, ist allgemein der Coeffizient des rten Gliedes ${}^{r}p\overset{n}{C}$, aus den durch 0, 1, 2, ... r, ... angedeuteten Elementen $\overset{0}{a}.., \overset{1}{a}.., \overset{2}{a}.., \ldots. \overset{r}{a}..$, gebildet. Aber die niedrigste Form welche ${}^{r}p\overset{n}{C}$ enthält, muß in allen Stellen lauter 0, dazu in der letzten r, enthalten, bekommt also $\frac{1.2\ldots.n}{1.2..(n-1)} = n$ zur Permutationszahl und ist, realisirt, $n(\overset{0}{a})^{n-1}.\overset{r}{a}$. In allen übrigen Combinationsformen können nicht mehr sämmtliche Plätze vor dem letzten mit o besetzt seyn, und da in keiner Combinationsform ein folgender Platz niedriger ausgefüllt seyn darf, als der vorhergehende, so kann sich in keiner dieser übrigen, in irgend einer Stelle, r wieder als Element einstellen, während successiv niedrigere Elemente sich einzufinden, ohne Ausnahme, nicht verfehlen werden.

B. Modificirte independente Auflösung des polynomischen Lehrsatzes.

Auf ähnliche Weise wie es in elementarischen Betrachtungen zu geschehen pflegt, kann man auch hier auf die Idee gerathen, vieltheilige Größen auf zweytheilige zurückzuführen und auf diese Art allmälig in derselbigen einzuschreiten.

Es sey die Form $a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ gegeben, (wobey hier zur Abkürzung für $\overset{0}{a}$ schlechthin a gesetzt ist) um zur Potenz des Grades n, welcher nun nach Belieben eine positive ganze Zahl seyn mag, erhoben zu werden, so daß sich das Resultat in eine, auf gleiche Weise fortschreitende Form entwickeln soll. Man behalte ihr Anfangsglied, a, als ersten Theil, bezeichne aber den Inbegriff aller folgenden für den Augenblick durch ein einfaches Zeichen, $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots = b$, und man wird $(a + b)^n$ zu berechnen haben, welches durch unmittelbare Anwendung des binomischen Lehrsatzes sogleich geschehen kann. $(a + b)^n = a^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1}b^1 + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2}b^2 \ldots + {}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}b^h \ldots + {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r}b^r \ldots$ In den successiven Gliedern dieser Reihe, werden die successiven Potenzen von b gefordert, und sie sind es, welche noch einer ferneren Entwicklung bedürfen, da jenes Zeichen nur einstweilig, als Andeutung der Form $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ gebraucht worden ist. Man hat also allmälig alle Potenzen dieser Form, von der ersten an, zu den successiv höheren hinauf, zu berechnen, jede mit dem vor ihr stehenden Factor aus der binomischen Entwicklung zu multipliciren, und alle diese einzelnen Reihen in eine Summe zusammenzuziehn. Zu einer solchen Berechnung aber sind wir, durch die unmittelbar vorhin abgeleiteten Regeln, vollkommen ausgerüstet. Wenn eine Form, wie die angegebene, auf die Potenz eines ganzen und positiven Exponenten erhoben werden soll, so bildet sich eine ähnliche Form, in deren niedrigstem Gliede die Hauptgröße, auf den Grad der geforderten Potenz selbst erhoben, wiedererscheint; in deren folgenden, allmälig die nächsthöheren auftreten. Die Coeffizienten sind Inbegriffe von Combinationsformen, die sich aus denen der Grundform als ihren Elementen bilden; sie gehören sämmtlich der Classe, welche durch den Grad der zu berechnenden Potenz angegeben wird, und der Summe, welche der Exponent, der

in jedem einzelnen Gliede vorkommenden Potenz, andeutet. Jede einzelne Form muß mit ihrer Versetzungszahl multiplicirt werden. Dem gemäß läßt sich der Gang aller dieser Entwicklungen sehr leicht folgendermaßen andeuten.

Es entspringt

aus	die Reihe
a^n	a^n
${}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1}b$	${}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1}({}^1p\overset{1}{C}x^1 + {}^2p\overset{1}{C}x^2 + {}^3p\overset{1}{C}x^3 \ldots + {}^rp\overset{1}{C}x^r \ldots)$
${}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2}b^2$	${}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2}(\quad {}^2p\overset{2}{C}x^2 + {}^3p\overset{2}{C}x^3 \ldots + {}^rp\overset{2}{C}x^r \ldots)$
${}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}\, a^{n-3}b^3$	${}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}\, a^{n-3}(\quad {}^3p\overset{3}{C}x^3 \ldots + {}^rp\overset{3}{C}x^r \ldots)$
$\vdots$	$\vdots$
${}_n\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r}b^r$	${}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r}(\quad {}^rp\overset{r}{C}x^r \ldots)$

und es ist die Summe aller dieser Reihen, welche das Gesuchte in gesetzmäßiger Gestalt darstellen wird.

Am bequemsten zieht man das Resultat der ganzen Entwicklung sogleich in ein allgemeines Glied zusammen, indem man die Frage aufwirft, aus was für Theilen der Coeffizient eines beliebig gewählten Gliedes z. E. des rten, welches x^r enthalten wird, in der zuletzt hervorgehenden Form seyn müsse. Nun gibt offenbar jedes Glied der binomischen Reihe, vom ersten nach dem anfänglichen an, bis zum rten hinauf, wenn man in ihm für b seinen Werth setzt, und es alsdann entwickelt, einen Theil, welcher in x^r multiplicirt seyn wird; man darf also, vorausgesetzt, daß h irgend eine ganze Zahl, kleiner als r bedeutet, behaupten daß der hte unter den Theilen, welche in jene Potenz der Hauptgröße multiplicirt werden müssen, aus dem hten Gliede der binomischen Reihe, indem es sich entwickelt, und dasjenige Glied dieser Entwicklung, welches in eben diese Potenz der Hauptgröße multiplicirt ist, hergibt, genommen werden müsse. Nun ist das hte Glied der binomischen Reihe ${}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}b^h = {}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h}(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots)^h$, und wenn von $(\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots)^h$ das Glied gefordert wird,

worin x^r vorkommt, so ist es $p^r \overset{h}{C} x^r$. Man versehe es mit dem Factor, welcher in der binomischen Reihe neben der zu entwickelnden Potenz steht, und man hat den hten Theil von denen, welche nach vollendeter Rechnung zu x gehören werden, das heißt, den hten Theil des ganzen Coeffizienten von $x^r = {}^r\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h} p^r \overset{h}{C}$. Man braucht in diesem bestimmten Ausdrucke nur für h allmälig alle Werthe, von 1 an bis r hin, zu setzen, um alle Theile zu erhalten, woraus sich der geforderte Coeffizient des rten Gliedes erzeugen wird. Es pflegt das Zeichen Σ, vor einen aus unbestimmten Zahlen gebildeten Ausdruck gesetzt, anzudeuten, daß für eine jener Zahlen allmälig successive ganze Zahlen substituirt, und die daraus hervorgehenden speciellen Werthe in eine Summe zusammengezogen werden sollen. Die unbestimmte Zahl, welche sich specialisiren soll, pflegt zur Seite daneben, und unter ihr die erste und lezte der ganzen successiven Zahlen gesetzt zu werden, in welche sie sich allmälig verwandeln soll, so daß z. E. $1 \ldots\ldots r \overset{h}{\Sigma}$ bedeutet, es soll in einem Ausdrucke für h allmälig jede ganze Zahl von 1 an, bis r hinauf, inclusive, gesetzt, und alle seine daraus hervorgehenden bestimmten Werthe in eine Summe gefaßt werden. Durch Hülfe dieses Zeichen kann das allgemeine Gesetz des polynomischen Satzes in folgende Formel zusammengezogen werden.

Die Größe $(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots\ldots + \overset{r}{a} x^r \ldots)^n$, entwickelt sich, was auch der Exponent seyn möge, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form, von welcher, vorausgesetzt daß die nachfolgenden Coeffizienten der Grundform, $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots$ als wiederholbare Elemente; die daraus gebildeten Complexionen als Producte aus diesen Elementen; ihr Inbegriff als Summe angesehen wird, allgemein das rte Glied $(1 \ldots\ldots r \overset{h}{\Sigma} {}^n\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h} {}^r p \overset{h}{C})\, x^r$ seyn wird.

Es kommt also, bey wirklicher Rechnung nach dieser Formel, die Hauptsache darauf an, alle Combinationsformen, welche der nemlichen Summe angehören, (denn r bleibt immer dasselbe, so lange der Coeffizient eines bestimmten Gliedes berechnet wird) für alle möglichen Classen (denn h nimt allmälig alle Werthe von 1 bis r an) vollständig zu entwerfen. Es bedarf zu dieser Absicht keiner andern Regeln, als der schon im Vorhergehenden vorgekommenen, durch deren Hülfe sich allmälig für jede Classe, von der ersten an, bis zu der höchsten hinauf, die der geforderten Summe gehörigen Formen finden lassen. Da es indessen nicht nothwendig ist, die arithmographische Ordnung zu beobachten, sondern hier in der Entwicklung der Formen eben so gut die lexicographische gebraucht werden darf, so könnte in der That eine Menge von verschiedenen combinatorischen Regeln für die geforderte Operation gegeben werden, wenn es sich überall für die Zwecke der Analysis der Mühe verlohnte *).

*) Man hat sich in der That, nicht bloß bei den neueren Bearbeitungen der Combinationslehre, sondern schon früher, mit mancherley Regeln für die Bildung aller Combinationsformen, die zu einer bestimmten Summe gehören, beschäftigt. Die meisten dieser Regeln sind combinatorisch recurrirend, oder involutorisch; man findet z. E. vermöge ihrer aus allen Formen, die einer gewissen Summe angehören, durch Vorsetzen neuer Elemente, und Austauschen anderer, diejenigen vollständig, welche zur nächsthöheren Summe gerechnet werden müssen. In einer umfassenden theoretischen Darstellung der reinen Combinationslehre mögen solche Untersuchungen ihren Werth haben, für die wirkliche Rechnungen besitzen sie ihn nicht, und man scheint beynahe vergessen zu haben, daß unsre Buchstaben-Ausdrücke nur Andeutungen von Rechnungen sind, und daß Recursionen unter solchen Andeutungen, die nicht mit Recursionen der durch sie berechneten bestimmten Zahlen zusammenfallen, für die Analysis als sehr unnütz betrachtet werden müssen. Was den einzelnen Formen, aus deren Inbegriff ein gewisser Coeffizient erwachsen ist, abgenommen oder zugefügt werden müßte, damit statt seiner der nächstfolgende Coeffizient zum Vorschein käme, zu wissen, erleichtert die wirkliche Berechnung sehr wenig; es würde fast unerträglich seyn, wenn bey

Sind die einzelnen Combinationsformen entwickelt, so versehe man jede von ihnen mit der ihr gebührenden Permutationszahl, realisire diese Producte aus den gegebenen Elementen, und addire zunächst nur diejenigen, welche zu der nemlichen Classe gehören, in eine Summe zusammen. Denn der Inbegriff dieser Formen bekommt einen gemeinschaftlichen Factor, aus einer bestimmten Potenz vom Anfangsgliede der gegebenen Grundform, und einem Binomialcoeffizienten dessen Rang und Zahl gleichfalls vorgeschrieben ist, durch Multiplication erzeugt. Eben darum ist es, wenn ein einzelnes Glied von der Potenz eines Polynomiums gefordert werden sollte, immer am bequemsten, die Combinationsformen in keiner andern als der arithmographischen Ordnung zu entwickeln. Die übrigens bey der Berechnung zu beobachtende Ordnung, findet sich von selbst aus der Grundformel.

Der Ausdruck des ganzen Gesetzes vereinfacht sich noch etwas, wenn man, was mit einer leichten Modification bekanntlich immer geschehen kann, das Anfangsglied der Grundform 1 seyn läßt. Denn alsdann können die Potenzen des Anfangsgliedes allenthalben, wo sie als Factoren vorkommen, weggelassen werden; es wird also von der Reihe, welche aus $(1 + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^n$ entspringt, das rte Glied seyn: $(1 \ldots . \overset{h}{r} \Sigma^n \overset{h}{\mathfrak{B}}\, {}^r p \overset{h}{C})\, x^r$.

---

wirklicher Potenziirung einer gegebenen Form, viele von den successiven Gliedern des Resultats auf diesem Wege berechnet werden sollten. Die wahre, brauchbare, analytische Recursion gibt allemal eine Regel, um aus den vollständigen Werthen früher berechneter Coeffizienten, allmälig jeden nachfolgenden zu finden. Und dazu kann, wenigstens für den Fall des polynomischen Lehrsatzes, keine jener bloß combinatorischen Regeln behülflich seyn. Höchstens da, wo es darauf ankäme, für mehrere der successiven Coeffizienten die einzelnen Producte, aus deren Zusammenfassen sie sich bilden sollen, anzudeuten, können sie mit Nutzen gebraucht werden.

Will man hingegen die Gestalt der Grundform so erweitern, daß die Exponenten in ihr überhaupt nur eine arithmetische Progression bilden, so hat dies auf unsre erste Formel, was die Coeffizienten betrifft, keinen Einfluß. Denn man kann statt $(ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \overset{2}{a}x^{\beta+2\delta}\ldots\ldots)^n$ setzen $(x^{\beta n}(a + \overset{1}{a}x^{\delta} + \overset{2}{a}x^{2\delta}\ldots\ldots)^n$. Deutet man in der eingeklammerten Größe x^{δ} augenblicklich durch u an, so wird sie $(a + \overset{1}{a}u^1 + \overset{2}{a}u^2\ldots)^n$, unsre Anfangs betrachtete Form, deren rtes Glied $\overset{h}{1\ldots r\Sigma}\,({}^n\mathfrak{B}\,\overset{h}{a}{}^{n-h}\;{}^rp\overset{h}{C})\,u^r$ ist. Setzt man in ihr für u seinen Werth zurück, so erhält man statt u^r, $x^{r\delta}$; fügt man den vorhin abgesonderten Factor $x^{\beta n}$ wieder bey; so ergibt sich das rte Glied der Reihe, wodurch sich $(ax^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta}\ldots)^n$ entwickelt, $= \overset{h}{1\ldots r\Sigma}\,({}^n\mathfrak{B}\,\overset{h}{a}{}^{n-h}\;{}^rp\overset{h}{C})\,x^{\beta n + r\delta}$, wobey die Combinationen aus $\overset{1}{a}\ldots$, $\overset{2}{a}\ldots$ erzeugt werden, also die Regel für die Berechnung des Coeffizienten ganz die vorige bleibt. Man hat nur in Absicht auf die Potenzen, die in den einzelnen Gliedern vorkommen, zu bemerken, daß sie nach derselben Progression, wie die der Grundform fortschreiten, und der des Anfangsgliedes gefunden wird, wenn man den, welchen die Grundform im Anfangsgliede führt, mit dem Grade der Potenz multiplicirt, worauf die Grundform selbst erhoben werden soll.

Man hätte übrigens diese zweyte modificirte Formel der Potenziirung auch sogleich combinatorisch aus der ersten, ursprünglichen ableiten können, wenn man in dem Ausdrucke, welchen die letztere für den Coeffizienten des rten Gliedes darbietet, ${}^rp\overset{n}{C}$, gebildet aus den Elementen $\overset{0}{a}\ldots$, $\overset{1}{a}\ldots$, $\overset{2}{a}\ldots$, so viele Unterabtheilungen gemacht hätte, als in ihr Formen liegen, die sich durch verschiedene Menge der darin enthal-

tenen Elemente von der Art $\overset{0}{a}$ von einander unterscheiden lassen. Eine solche Ableitung würde selbst kürzer als die vorige geworden seyn. Aber diese hat den Vorzug, daß ihre Gültigkeit soweit reicht, als die des binomischen Satzes, so daß, wenn die Formel für $(a+b)^n$ auch dann gültig seyn sollte, wenn n keine ganze, positive Zahl ist, die darauf gegründete für $(a+\overset{1}{a}x^1\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots)^n$ eben so weit zulässig seyn wird.

II. Recurrirende Entwicklung des polynomischen Satzes.

A. Abgeleitet aus der independenten Bestimmung.

Der erste Haupttheil von den Betrachtungen, welche die Berechnung beliebiger Potenzen eines einfachen, gesetzmäßigen Polynomiums betreffen, der **independenten** Bestimmung jedes Coeffizienten in der sich dabey entwickelnden Form gewidmet, ist in der vorhergehenden Ableitung enthalten. Aber sowohl die Vollständigkeit der Theorie, als die Bequemlichkeit der wirklichen Berechnung, verlangt noch eine **recurrirende** Bestimmung, die uns in den Stand setzt, aus schon bekannten Werthen früherer Glieder in eben derselben, jedes nachfolgende abzuleiten. Wir wollen suchen von jener ersten zu dieser letzten den Uebergang zu finden.

Als in der Lehre von der Division für den Quotienten $\frac{1}{(1-\overset{1}{a}x-\overset{2}{a}x^2\ldots-\overset{r}{a}x^r\ldots)}$ der Werth gesucht wurde, erhielten wir zuerst, den Quotienten durch $\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2\ldots+\overset{r}{A}x^r\ldots$ andeutend, die Recursionsformel $\overset{r}{A}=\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}\ldots+\overset{k}{a}\overset{r-k}{A}\ldots+\overset{r}{a}\overset{0}{A}$. Daraus leiteten wir nachher die independente Regel ab, welche kurz durch $1\ldots\overset{h}{.}\ldots r\,\Sigma(p^r\overset{h}{C})=\overset{r}{A}$ angedeutet werden kann.

Gegenwärtig haben wir, wenn die aus $(a + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots . + \overset{r}{a} x^r \ldots)^n$ entspringende Reihe durch $\overset{0}{A} + \overset{1}{A} x + \overset{2}{A} x^2 \ldots . + \overset{r}{A} x^r \ldots$ bezeichnet wird, für $\overset{r}{A}$ den independenten Werth $1 \ldots . r \Sigma ({}^n\mathfrak{B} a^{n-h} p^r \overset{h}{C})$, und fragen rückwärts nach einer Recursionsformel, woraus er entspringen könnte.

Es ist offenbar eine große Aehnlichkeit zwischen dem letzten independenten Ausdruck, und jenem bey der Division betrachteten. Wäre der Factor ${}^n\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h}$ nicht in diesem, das heißt, sollten die permutirten Combinationsformen nicht mit einem Binomialcoeffizienten der geforderten Potenz, dessen Zahl ihre Classe bestimmt, und einer gleichfalls davon abhängenden Potenz des ersten Coeffizienten der Grundform multiplicirt werden, so fiele er mit jenem völlig zusammen, und es würde hier die vorige Recursionsformel

$$\overset{r}{A} = \overset{1}{a} \overset{r-1}{A} \ldots . + \overset{k}{a} \overset{r-k}{A} \ldots + \overset{r}{a} \overset{0}{A}$$

gleichfalls gültig seyn. Daher ist die Frage gewiß sehr natürlich: sollte nicht, da ein in der Größe, die jezt durch $\overset{r}{A}$ bezeichnet wird, vorhandener Factor ${}^n\overset{h}{\mathfrak{B}} a^{n-h}$ das Einzige ist, welches verhindert, sich zu ihrer recurrirenden Bestimmung jener Formel zu bedienen, dadurch, daß in derselben jeder der vorhergehenden Größen im Recurriren ein eigner Factor beygegeben würde, mit Beybehaltung der übrigen Formel, das Gesuchte geleistet werden können, mithin, wenn unter $\overset{1}{f}, \overset{2}{f}, \overset{3}{f}, \ldots$ solche, noch unbestimmte Factoren zu verstehen wären, vermöge einer Formel wie:

$$\overset{r}{A} = \overset{1}{f} \overset{1}{a} \overset{r-1}{A} + \overset{2}{f} \overset{2}{a} \overset{r-2}{A} \ldots + \overset{k}{f} \overset{k}{a} \overset{r-k}{A} \ldots . + \overset{r}{f} \overset{r}{a} \overset{0}{A}$$

sich die Beziehung unter den successiven Coeffizienten darstellen lassen?

Nehmen wir das allgemeine Schema aller Formen, welche dem independenten Gesetze gemäß $\overset{r}{A}$ enthalten muß, vorausgesetzt, daß k jedes Glied der natürlichen Zahlenreihe bedeute, die Zeichen α, β, ... allgemein π, beliebig zu wählende ganze Zahlen, und daß man sie jedesmal so bestimme, daß $\alpha + \beta \ldots + \pi + \ldots$ allgemein $\Sigma(\pi)$ die Summe m ausmachen, zugleich aber $1 . \alpha + 2 . \beta \ldots + k . \pi + \ldots$, kürzer $\Sigma(k\pi) = r$ betrage, so wird $(\overset{1}{a})^{\alpha} (\overset{2}{a})^{\beta} \ldots (\overset{k}{a})^{\pi} \ldots$ die allgemeine Andeutung aller Formen der mten Classe, die in $\overset{r}{A}$ vorkommen, in Absicht auf die Elemente, woraus sie sich bilden, abgeben. Dabey ist für α, β, ... π, selbst der Werth o nicht ausgeschlossen, vorausgesetzt daß $(\overset{k}{a})^{o}$ bedeute, das Element $\overset{k}{a}$ solle in der Form gar nicht vorkommen, und aus ihrer Andeutung ganz wegfallen.

Unter dieser Voraussetzung, wo also für α, $\beta \ldots \pi \ldots$ nur reelle Zahlen hervortreten, wird die beyzufügende Permutationszahl $\frac{1 . 2 \ldots\ldots m}{1 \ldots\ldots \alpha . 1 \ldots\ldots \beta . 1 \ldots\ldots \pi}$ seyn, unwandelbar, sobald α, β, ... π, ... gewählt worden sind. Sie mag der Kürze wegen N heißen. Außer ihr gibt das independente Gesetz allen Formen der Classe m, noch den unwandelbaren Factor $^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}\, a^{n-m}$, so daß also, wenn der Kürze wegen $(\overset{1}{a})^{\alpha} . (\overset{2}{a})^{\beta} \ldots (\overset{k}{a})^{\pi} \ldots = E$ gesetzt wird, alle in $\overset{r}{A}$ enthaltene Formen der mten Classe durch $^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}} . a^{n-m} . N . E$ angedeutet werden können.

Läßt man aus dem Elementeninbegriff $E = (\overset{1}{a})^{\alpha} . (\overset{2}{a})^{\beta} . (\overset{k}{a})^{\pi} \ldots$ ein Element, allgemein $\overset{k}{a}$, einmal weg, so wird er $(\overset{1}{a})^{\alpha} . (\overset{2}{a})^{\beta} \ldots (\overset{k}{a})^{\pi-1} \ldots$ gehört jetzt der $m - 1$ten Classe, und einer Summe, die $r - k$ beträgt, während sie vorher der mten Classe, und der Summe r angehörte, und ist jetzt

allgemeine Andeutung aller Formen dieser Art. Er heiße D, wo offenbar $\overset{k}{a}.D = E$.

Nun aber enthält $\overset{r-k}{A}$, alle Formen zur Summe $r-k$, also auch die der $(m-1)$ten Classe, angedeutet durch unser D. Aber so fern sie in $\overset{r-k}{A}$ liegen, führen sie die Permutationszahl $\frac{1.2\ldots\ldots\ldots(m-1)}{1\ldots\alpha.1\ldots\beta\ldots1\ldots(\pi-1)} = \frac{\pi N}{m}$, (welcher letzte Ausdruck selbst für $\pi = o$ richtig ist) und den Factor ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}}.a^{n-(m-1)}$ bey sich, so daß ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}}.a^{n-(m-1)}\frac{\pi N}{m}D$ ihre allgemeine Andeutung ist, so fern sie in $\overset{r-k}{A}$ vorkommen. Es entsteht nun die Frage, ob man nicht alle Formen der mten Classe, die in $\overset{r}{A}$ liegen, zu sammt dem ihnen dort gebührenden Factor erhalten könnte, wenn man die der $(m-1)$ten Classe, welche in $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}\ldots\overset{r-k}{A}\ldots\overset{r-1}{A}$ vorkommen, mit den Elementen $\overset{r-1}{a}, \overset{r-2}{a}, \ldots \overset{k}{a} \ldots \overset{1}{a}$, so daß jedesmal die Indices der beyden zusammengestellten Factoren, des einen von der Art a, des andern von der Art A, zusammen r ausmachen, denen in gleicher Ordnung noch gewisse anderweitig beyzugebende Factoren, $\overset{r-1}{f}, \overset{r-2}{f}\ldots\overset{k}{f}$.. zuzugeben wären, multiplicirte. In Zeichen, man frägt, ob nicht ein Ausdruck für $\overset{k}{f}$ auszumitteln seyn möchte, der bewürkte, daß, wofern man ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}}.a^{n-(m-1)}\frac{\pi.N}{m}.\overset{k}{f}.\overset{k}{a}.D$ nähme und darin für k und π alle Werthe, die der Ansatz von D bedingt, an die Stelle setzte [das heißt alle, die $\Sigma(\pi) = m$ und $\Sigma(k\,\pi) = r$ zuläßt], hernach aber sie alle in eine Summe zusammenzöge, alsdann ${}^n\overset{m}{\mathfrak{B}}.a^{n-m}.N.E$ herauskäme..

Der allgemeine Ausdruck aller in diese Summe zu bringenden Glieder hat, in ihm statt $\overset{k}{a} . D$ gesetzt $= E$, die unwandelbaren Factoren ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}} . a^{n-(m-1)} \frac{N}{m} . E$. Drückt man den gewünschten Werth der Summe ${}^n\overset{m}{\mathfrak{B}} . a^{n-m} . N . E$, [weil für ${}^n\overset{m}{\mathfrak{B}}$ gesetzt werden darf ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}} . \frac{n-(m-1)}{m}$], durch ${}^n\overset{m-1}{\mathfrak{B}} . a^{n-(m-1)}$ $\frac{(n-(m-1))N . E.}{m}$ aus, so findet sich darin derselbe Factor.

Wenn aber alle Theile im Ansatz einer Summe einen gemeinschaftlichen unwandelbaren Factor führen, und die Summe selbst den nemlichen in sich trägt, so muß dieser Ansatz bestehn, wenn jener Factor beyderseitig weggelassen wird.

Geschieht dieß aber, so bleibt auf der einen Seite bloß $\pi . \overset{k}{f}$, mit der Forderung, daß darin für k und π alle Werthe, welche die Bedingung des anfänglichen Ansatzes gestattet, gesetzt und diese Producte zusammengerechnet werden sollen, auf der andern aber, als geforderte Summe, $\left(\frac{n-(m-1)}{a}\right)$ zurück.

Die Summe der Producte aus π in $\overset{k}{f}$, vorausgesetzt, daß π und k alle möglichen zusammengehörigen Werthe annehmen, soll eigentlich drey Theile $\frac{n}{a}, \frac{-m}{a}, \frac{+1}{a}$ hervorbringen. So muß der Factor $\overset{k}{f}$ dreytheilig $= s + t + v$ seyn. Sein erster Theil soll $\Sigma(\pi s) = \frac{n}{a}$ geben; es muß also, $s = \frac{n k}{r a}$ seyn, da angenommen ist, das $\Sigma(\pi k) = r$, mithin $\Sigma\left(\frac{n k \pi}{r a}\right)$, weil n, r, a, feste Größen sind $= \frac{n}{r a} \Sigma(k \pi)$ $= \frac{n}{r a} . r = \frac{n}{a}$. Sein zweyter Theil t muß $= \frac{1}{a}$ seyn,

weil $\Sigma(\pi) = m$ ist, also $\Sigma\left(-\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{m}{a}$ seyn wird. Sein dritter Theil endlich ν, muß $\frac{k}{ra}$ seyn, weil $\Sigma\left(\frac{k\,\pi}{ra}\right)$ der obigen Annahme zufolge $\frac{r}{ra} = \frac{1}{a}$ geben muß. So ist also

$$\overset{k}{f} = s + t + v = \frac{nk}{ra} - \frac{1}{a} + \frac{k}{ra} = \left(\frac{nk - r + k}{ra}\right),$$

offenbar eine Größe, die lediglich von n, r und k abhängt. Es ist besonders wichtig zu bemerken, daß in dem Ausdruck von $\overset{k}{f}$ durchaus nichts von m, dem Grade der Classe, wozu die Formen, welche aus $\overset{r}{A}$ hervorgehoben waren, gehören sollten, vorkommt, daß er also für alle Classen die $\overset{r}{A}$ enthält, das heißt für das ganze $\overset{r}{A}$, durchaus der nemliche bleibt. Der Fall $m = 1$ scheint in der That eine Ausnahme von der Regel zu machen. Es gibt in $\overset{r}{A}$ nur eine Form von der ersten Classe, sie ist nach dem independenten Gesetze $n\,a^{n-1}.\overset{r}{a}$. Hier kann an niedrigere Classen, an ein Vorsetzen von Elementen, um sie zur 1ten Classe zu erheben, u. s. w. gar nicht gedacht werden. Nimt man indessen in völliger Harmonie mit der obigen Regel, als letztes Glied derselben $\frac{rn.a\overset{r\,o}{A}}{ra} = n\,a^{n-1}.\overset{r}{a}$ auf, so ist auch diese Schwierigkeit beseitigt und es kommt dadurch, was $\overset{r}{A}$ von der ersten Classe enthält, und was aus $\overset{r-1}{A}$, $\overset{r-2}{A}$, .. $\overset{r}{A}$, durch Vorsetzen des Elements $\overset{r}{a}$ und eines anderweitigen Factors $\overset{r}{f}$ nicht erhalten werden könnte, weil es, welches sinnlos seyn würde, der 0ten Classe hätte angehören müssen, in der That in den Ausdruck von $\overset{r}{A}$ hinein, völlig zusammenstimmend mit der an-

derweitig bekannten Bedeutung von $\overset{0}{A}$. Und so ergibt es sich, daß allerdings eine Recursionsformel von der Gestalt möglich ist, wie sie oben angenommen war. Jeder der vorhergehenden Coeffizienten, $\overset{r-1}{A}, \ldots \overset{r-k}{A}, \ldots \overset{0}{A}$, muß außer dem Element, welches seine Zahl zu der des gesuchten ergänzt, noch mit einen eigenen Factor multiplicirt werden. Aber die Reihe dieser Factoren ist nicht, wie bey der einfachen Recursion des Dividirens, unabänderlich bestimmt, so daß ihre Größe und Folge die nemliche bliebe, man möge einen niedrigeren, oder einen höheren Coeffizienten bestimmen wollen. Sondern ein jeder von ihnen nimt einen neuen Werth an, und muß besonders wieder berechnet werden, so wie man zur Berechnung eines neuen nächsthöheren Coeffizienten fortschreiten will. Dies erhellet augenblicklich, wenn wir in die angenommene Recursionsformel für $\overset{k}{f}$ seinen gefundenen Werth in die Stelle setzen. Sie wird alsdann:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}.}{ra} + \frac{(kn-r+k)\overset{k}{a}.\overset{r-k}{A}\ldots}{ra} + \frac{rna\overset{r}{A}}{ra},$$

erledigt übrigens in dieser Gestalt den Zweck der Aufgabe vollkommen.

B. Recurrirende Entwicklung des polynomischen Satzes ohne Voraussetzung einer independenten.

Es mag, bey der großen Wichtigkeit einer recurrirenden Auflösung des polynomischen Lehrsatzes gestattet seyn, die Ableitung derselben noch auf einem andern Wege zu geben, und sich dabey zum ersten Male einer Methode zu bedienen, welche für alle recurrirende Bestimmungen höherer Art die fruchtbarste und am weitesten greifende genannt werden darf.

Das Characteristische dieser Methode besteht in Folgendem: Wenn man durch directe Betrachtungen schon die Ueberzeu-

gung gewonnen hat, daß ein bestimmter, aus einer Haupt=größe x gebildeter, complicirter Ausdruck sich durch eine nach Potenzen des x fortschreitende Form, deren Exponenten eine bekannte und genau vorgeschriebene Progression bilden, deren Coeffizienten aber noch nicht ausgemittelt sind, unfehlbar müsse entwickeln lassen, so setzt man als Werth des Ausdrucks eine nach Potenzen von x unter jener Exponenten=Progression fortgehende Form, mit fingirten Coeffizienten, vorläufig an. Da die Hauptgröße x völlig unbestimmt, und jedes Werths fähig ist, so kann man sie auch so annehmen, als wenn sie, durch einen unbestimmten Zuwachs, in einen neuen Zustand übergegangen wäre, statt x z. E. $x + z$ substituirend. So kommt auf beyden Seiten, in die hier wie dort geforderten Rechnungen, eine zweytheilige Größe, und das, was aus ihr berechnet werden soll, wird einer ferneren Entwicklung fähig. Bey dieser kann man den neuen Zuwachs z, sobald man will, als regierende Hauptgröße ansehn, und verlangen, daß auf beyden Seiten durch Formen, die nach Potenzen von ihr fortgehn, die Entwicklungen gemacht werden sollen, welche, unter der Voraussetzung des anfänglichen Ansatzes, von selbst identisch seyn müssen. Verfolgt man diese Identität durch gleichhohe Glieder auf beyden Seiten, so wird in der Regel schon die Identität der ersten nachfolgenden Glieder, d. h. deren die z^1 enthalten, Beziehungen ergeben, wodurch die fingirten Größen des anfänglichen Ansatzes zur recurrirenden Bestimmung gelangen. In einem besonderen Abschnitte der Analysis, welcher die Aenderungen aller aus einer Haupt=größe x auf irgend eine Art gebildeten Ausdrücke, falls sie selbst einen unbestimmten Zusatz erhalten sollten, aus diesem berechnen lehrt, der sogenannten **Differenzen= oder Incrementen=Rechnung** erhält diese Methode allgemeine Regeln, Kunst=sprache und Bezeichnung, deren es hier noch nicht bedarf *).

*) Diese Methode kann nur dann mit Sicherheit gebraucht werden, wenn man nicht allein durch vorangegangene Untersuchung über das

Die Aufgabe, ein Polynomium auf jede Potenz eines ganzen und positiven Exponenten n zu erheben, berechtigt, wenn man sich auch nur an die mechanische Regel des gemeinen Multiplicirens hält, zu dem Ansatz:

$$(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots)^n=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\ldots+\overset{r}{A}x^r\ldots$$

Da für x in demselben gesetzt werden kann, was man will, so darf man statt x substituiren x + z, unter z eine beliebige Größe verstanden. In dem Resultat.

$$(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}(x+z)+\overset{2}{a}(x+z)^2\ldots+\overset{r}{a}(x+z)^r\ldots)^n=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}(x+z)\ldots+\overset{r}{A}(x+z)^r\ldots$$

wird man auf beyden Seiten die geforderten Potenzen von x + z nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln, und die Formen, welche dadurch entstehn, so zusammenfassen können, daß sie nach Potenzen von z fortschreiten.

So würde in der dißseitigen, unter dem Zeichen der Potenziirung stehenden Form, die Summe aller Anfangsglieder aus den binomischen Entwicklungen das Totalglied geben, welches gar kein z enthielte, also

$\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots=P$ seyn würde.

Auf gleiche Art müßte die Summe aller ersten nachfolgenden Glieder aus jenen binomischen Entwicklungen Alles in z multiplicirte, mithin $(\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}x\ldots+r\overset{r}{a}x^{r-1}+\ldots).z=Q.z$ hervorbringen, und auf dieselbe Weise ließen sich die folgenden Glieder des entwickelt umgestalteten Ausdrucks erhalten, der

---

zu Entwickelnde gewiß ist, daß es sich durch eine gesetzmäßige Grundform unfehlbar müsse darstellen lassen, sondern auch auf gleichem Wege die Exponenten der Potenzen, welche in den successiven Gliedern jener Grundform auftreten müssen sämmtlich bestimmt anzugeben vermag. Im gegentheiligen Falle ist die Gefahr vergeblicher Arbeit, und falscher oder widersinniger Resultate vorhanden.

auf diesem Wege die Form $(P + Qz + Rz^2 \ldots)^n$ angenommen haben würde.

In gleichem Sinne würde der jenseitige Ausdruck eine Umformung gestatten, und, wofern man:

$$\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots\ldots + \overset{r}{A}.x^r = \mathfrak{P}$$

$$\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x \ldots\ldots + r\overset{r}{A}.x^{r-1} = \mathfrak{Q} \text{ setzte,}$$

durch $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}z + \mathfrak{R}z^2 + \ldots\ldots$ ausgedrückt werden können. Man wäre also berechtigt:

$(P + Qz + Rz^2 \ldots)^n = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}z + \mathfrak{R}z^2 \ldots\ldots$ zu setzen. Es müßte also, wenn sich der dißseitige Ausdruck nach der ursprünglichen Regel des polynomischen Satzes entwickelt, sein Anfangsglied P^n dem jenseitigen Anfangsgliede $\mathfrak{P}$ identisch seyn, wie es in der That, Kraft des anfänglichen Ansatzes, von selbst der Fall ist.

Auf gleiche Weise müßte das erste nachfolgende Glied der dißseitigen Entwicklung, $n.P^{n-1}.Q.z$, dem gleichhohen jenseitigen, $\mathfrak{Q}z$ identisch, mithin $n.P^{n-1}.Q = \mathfrak{Q}$ seyn.

Legt man in diesem Ausdruck auf beyden Seiten noch den Factor P bey, so erhält man $nP^n.Q$, oder, da $P^n = \mathfrak{P}$ ist, $n.\mathfrak{P}.Q = P.\mathfrak{Q}$ und, sobald diese Identität entwickelt wird, eine Gleichung zwischen den Coeffizienten der Grundform, enthalten in P und Q, und denen ihrer verlangten Potenz, enthalten in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.

Da nemlich:

$$\mathfrak{P} = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots\ldots + \overset{r-1}{A}x^{r-1} + \overset{r}{A}x^r \ldots$$

$$Q = \overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x^1 + 3\overset{3}{a}x^2 \ldots\ldots r.\overset{r}{a}x^{r-1} + (r+1)\overset{r+1}{a}x^r \ldots$$

so wird für das Product $n.\mathfrak{P}.Q$ allgemein das $r-1$te Glied, nach gemeiner Multiplicationsregel:

$$(n.\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2n\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + kn\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + rn\overset{r}{a}\overset{0}{A})\, x^{r-1},$$

Da ferner

$$P = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r-1}{a}x^{r-1} + \overset{r}{a}x^r \ldots$$

$$\mathfrak{Q} = \overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x \ldots + r\overset{r}{A}x^{r-1} + (r+1)\overset{r+1}{A}x^r \ldots$$

so ist für das Product $P.\mathfrak{Q}$ allgemein das $r-1$te Glied:

$$(r.\overset{0}{a}.\overset{r}{A} + (r-1)\overset{1}{a}.\overset{r-1}{A} \ldots + (r-k)\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \overset{r-1}{a}\overset{1}{A})x^{r-1}.$$

Da beyde Producte identisch seyn sollen, so sind es auch ihre $r-1$ten Glieder und deren Coeffizienten. Daraus ergibt sich mit leichter Transposition und Division:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\overset{1}{a}.\overset{r-1}{A} \ldots + (kn-r+k)\overset{k}{a}.\overset{r-k}{A} \ldots + [(r-1)n-1]\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + nr\overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r\overset{0}{a}}.$$

welches offenbar die obige recurrirende Formel hervorbringt.

Es wird also die allgemeine recurrirende Auflösung des polynomischen Lehrsatzes auf folgende Art ausgedrückt werden können, wobey sogleich die Verallgemeinerung im Ausdruck der Grundform, welche auf die Coeffizientenberechnung durchaus ohne Einfluß ist, mit aufgenommen worden. Wenn $(\overset{0}{a}x^{\beta} + \overset{1}{a}x^{\beta+\delta} + \ldots \overset{r}{a}x^{\beta+r\delta})^n$ berechnet werden soll, so entsteht eine Reihe, $= \overset{0}{A}x^{n\beta} + \overset{1}{A}x^{n\beta+\delta} + \overset{2}{A}x^{n\beta+2\delta} \ldots \overset{r}{A}x^{n\beta+r\delta} \ldots$ Ihr erster Coeffizient ist $A = a^n$; die folgenden können allmälig auseinander durch Hülfe der Formel:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{r\overset{0}{a}}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \frac{(2n-r+2)}{r\overset{0}{a}}\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots \ldots + \frac{(kn-r+k)}{r\overset{0}{a}}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \frac{rn}{r\overset{0}{a}}\overset{r}{a}\overset{0}{A},$$

oder bequemer, wenn man alle Glieder unter den gemeinschaftlichen Nenner stellt,

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\,\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A} + (2n-r+2)\,\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{A} \,..+}{r\overset{0}{a}}$$

$$\frac{+(kn-r+k)\,\overset{k}{a}\,\overset{r-k}{A} \,...+ rn\,\overset{r}{a}\,\overset{0}{A}}{r\overset{0}{a}}$$

abgeleitet werden.

Die Specialisirung dieser Recursionsformel hat außer der größeren Weitläufigkeit keine Beschwerde. Sie gibt, allmälig für r die successiven ganzen Zahlen gesetzt:

$$\overset{1}{A} = \frac{n\,.\,\overset{1}{a}\,\overset{0}{A}}{\overset{0}{a}}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{(n-1)\,\overset{1}{a}\,\overset{1}{A} + 2n\,\overset{2}{a}\,.\,\overset{0}{A}}{2\overset{0}{a}}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{(n-2)\,\overset{1}{a}\,.\,\overset{2}{A} + (2n-1)\,\overset{2}{a}\,\overset{1}{A} + 3n\,\overset{3}{a}\,\overset{0}{A}}{3\overset{0}{a}}$$

$$\overset{4}{A} = \frac{(n-3)\,\overset{1}{a}\,\overset{3}{A} + (2n-2)\,\overset{2}{a}\,\overset{2}{A} + (3n-1)\,\overset{3}{a}\,\overset{1}{A} + 4n\,\overset{4}{a}\,\overset{0}{A}.}{4\overset{0}{a}}$$

Der Mechanismus, unter welchem sie in fortschreitender Berechnung bequem zu gebrauchen ist, kann leicht gefunden werden.

Aus beyden Regeln für die Potenziirung eines Polynomiums, der independenten sowohl als der recurrirenden, erhellet, daß jeder Coeffizient des Resultats zu seiner Bildung gerade eben so viele von den Coeffizienten der Grundform erfordert, als seine Zahl Einheiten hat. Diese Bemerkung ist wichtig, sobald die Form, welche potenziirt werden soll, selbst erst durch entwickelnde arithmetische Operationen gefunden

werden muß, und macht einen wesentlichen Theil von dem Beweise des allgemeinen Satzes aus, daß überhaupt Formen, mit denen man rechnet, nur bis zu dem Grade entwickelt zu seyn brauchen, bis zu welchem das aus ihnen abzuleitende Resultat getrieben werden soll.

Besteht das Polynomium aus einer bestimmten Anzahl von einzeln gegebenen Gliedern, so kann man bey seiner Potenziirung ihm selbst vorläufig die steigende oder fallende Anordnung geben, und wird alsdann jedesmal das Resultat in gleicher Form erhalten.

Achtes Kapitel.

Wurzelausziehung. — Allgemeinste Form des binomischen und polynomischen Satzes.

I. Recurrirende Formel der Wurzelausziehung.

Daß durch die Operation der Potenziirung, welche Producte aus beliebig vielen identischen Formen berechnen lehrt, auch die Idee eines umgekehrten Verfahrens, der Wurzelausziehung, herbeygeführt werde, versteht sich von selbst. Wenigstens wird es sich, ihr zufolge, als Frage aufdringen, ob nicht jede beliebig gegebene Form als fertiges Product aus bestimmt bezeichneter Anzahl gleicher Factoren angesehn werden könne, und sich wieder in solche zerfällen lasse.

Wenn das gegebene Product sowohl, als die gleichen Factoren in die man es aufzulösen beabsichtigt, nach den Gesetzen der Grundform für die Analysis gebildet seyn sollen, so wird man die Wurzelausziehung in ihrer ursprünglichen Forderung wesentlich beschränken müssen, um eine mit Sicherheit nach festen Regeln lösbare Aufgabe zu erhalten.

Wollte man unbedingt die Frage stellen, ob nicht jederzeit eine gesetzmäßige Form gefunden werden könne, die zu einer

beliebigen bestimmten Potenz erhoben, eine andere gegebene hervorbringe, so würde sie verneint werden müssen. —

Verlangte man hingegen eine Form zu finden, welche, zu einer vorgeschriebenen Potenz erhoben, eine neue erzeugte, die in allen successiven Gliedern vom Anfangsgliede an, bis zu einem folgenden von beliebig gewählter Zahl, mit einer gegebenen Form zusammenfällt, so ist leicht zu zeigen, daß dieses allemal möglich seyn werde.

Es sey die gegebene Form $\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots\ldots \overset{n}{a}x^n \ldots$ Man frägt, ob sich nicht eine andere finden lasse, deren mte Potenz, würklich berechnet, mit jener ersten in allen Gliedern bis zum nten Range übereinstimmen könnte? Man fingire, um die Frage zu beantworten, eine solche Form als schon gefunden $= \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots$; man erhebe sie würklich zur mten Potenz, und setze das Resultat dieser Potenziirung bis zum nten Grade der gegebenen Form identisch $(\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots)^m = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{n}{a}x^n \ldots$ Gerade dadurch werden sich Mittel ergeben, um Coeffizienten der fingirten Form, der Absicht genügend, auf eine sichere und unzweydeutige Weise zu bestimmen.

Aus der Lehre von der Multiplication ist bekannt, daß, bey der Potenziirung einer Form, zu jedem Coeffizienten des Resultats genau so viele von den ersten Coeffizienten der Form selbst, als die Zahl des gesuchten Coeffizienten Einheiten enthält, beytragen: allgemein in Zeichen, zu dem n + 1ten Coeffizienten der entwickelten Potenz $(\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots)^m$, die n + 1 ersten Coeffizienten der Form selbst, $\overset{0}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A} \ldots \overset{n}{A}$. Es ist gleichfalls bekannt daß jeder von diesen, da wo er zum erstenmale erscheint, nur auf die erste Potenz erhoben vorkommen kann, den anfänglichen ausgenommen: in Zeichen: der

Coeffizient des ersten Gliedes nach dem anfänglichen in der Potenz unsrer Form, enthält nur $\overset{0}{A}$ und $\overset{1}{A}$, den letzten nur in einem einzigen Gliede, welches $m\overset{0}{A}{}^{m-1}\overset{1}{A}$ seyn wird; der des zweyten Gliedes hat bloß $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ in sich, und der letzte kommt nur in einem Gliede des ganzen Ausdrucks $m\overset{0}{A}{}^{m-1}\overset{2}{A}$ vor, u. s. w. Berechnet man also die $n+1$ ersten Glieder jener geforderten Potenz, um jeden ihrer Coeffizienten dem gleichhohen Coeffizienten der gegebenen Form einzeln gleich zu setzen, so bekommt man ebensoviele, $n+1$, einzelne Gleichungen heraus. In der ersten Gleichung wird, als fingirte, und also noch unbekannte Größe, blos der Anfangscoeffizient der angenommenen Form vorkommen, $\overset{0}{A}{}^m = a$, sich also aus ihr bestimmen; in der zweyten Gleichung wird außer ihm, der nun schon bekannt geworden ist, auch noch der erste nachfolgende Coeffizient, $\overset{1}{A}$, auf die erste Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, erscheinen, mithin eine Gleichung darbieten, die nur vom ersten Grade ist, in sofern er als die einzige unbekannte Größe in ihr liegt, so daß er aus ihrer Auflösung jedesmal einen einzigen Werth erhalten wird. Und so muß jede folgende von diesen Gleichungen einen folgenden der fingirten Coeffizienten, nur auf die erste Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, in sich schließen, der also, wenn die vorhergehenden Coeffizienten aus den früheren Gleichungen schon bestimmt sind, sicher und ohne Zweydeutigkeit aus ihr gefunden werden kann.

Es ist indessen nicht nöthig, diesen Weg in würklicher Ausführung zu verfolgen. Eine gründliche Theorie der Potenziirung, die den Zusammenhang zwischen Wurzel und Potenz nicht allein independent, sondern auch recurrirend entwickelt, überhebt solcher Weitläuftigkeit, und überhaupt einer ferneren ursprünglichen Untersuchung.

Die Theorie der Potenzirung lehrt uns, daß für jede beliebige ganze positive Zahl n

$(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2..+\overset{r}{a}x^r..)^n = \overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2...+\overset{r}{A}x^r..$

gesetzt werden dürfe; sie zeigt uns den Zusammenhang zwischen den Coeffizienten der Wurzel und denen der Potenz, nicht allein independent, so daß wir jedes A, aus den dasselbe bestimmenden a, direct bilden können, sondern auch recurrirend, durch eine allgemeine Regel, welche die Verbindungen der A und a untereinander nachweist.

In der bisherigen Betrachtung ist die letzte Formel ihrer Entstehung und ihrem nächsten Zwecke gemäß, bloß dazu benutzt, um, vorausgesetzt daß die a als bekannt angesehen werden, aus ihnen jedes folgende A zu berechnen, wofern die vorhergehenden A schon gefunden sind, wozu sie in der Gestalt:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)\overset{r-1}{A}.\overset{1}{a}...+(kn-r+k)\overset{r-k}{A}.\overset{k}{a}..+}{r\overset{0}{a}}$$

$$\frac{+[(r-1)n-1]\overset{1}{A}\overset{r-1}{a}+rn\overset{0}{A}\overset{r}{a}}{r\overset{0}{a}}$$

vollkommen zweckmäßig war.

Will man umgekehrt die A als gegeben annehmen, mithin die Form $\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2...\overset{r}{A}x^r$ als bekannt setzen, hingegen die a als gesucht betrachten, mithin $\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2..+\overset{r}{a}x^r$, welches offenbar $\sqrt[n]{(\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2..\overset{r}{A}x^r..)}$ seyn wird, berechnen, so bedarf jene Gleichung zwischen den A und a nur einer leichten Transposition um sofort:

$$\overset{r}{a} = \frac{-[(r-1)n-1]\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}..-[(r-k)n-k]\overset{r-k}{a}\overset{k}{A}..-(n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+r\overset{0}{a}.\overset{r}{A}}{rn.\overset{0}{A}}$$

zu geben.

Hebt man in den einzelnen Coeffizienten den gemeinschaftlichen Divisor n, so darf man im ersten Gliede, statt $-\frac{[(r-1)n-1]}{n} = \left(\frac{1}{n}-r+1\right)$; allgemein im kten Gliede statt $-\frac{[(r-k)n-k]}{n} = \left(\frac{k}{n}-r+k\right)$ im vorletzten statt $-\frac{(n-r+1)}{n} = (r-1)\frac{1}{n}-1$, setzen, und erhält so

$$\overset{r}{a} = \frac{\left(\frac{1}{n}-r+1\right)\overset{r-1}{a}\,\overset{1}{A}\ldots+\left(k\cdot\frac{1}{n}-r+k\right)\overset{r-k}{a}\,.\,\overset{k}{A}\ldots+}{r\overset{0}{A}.}$$

$$+\frac{\left((r-1)\frac{1}{n}-1\right)\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A}+r\frac{1}{n}\,\overset{0}{a}\,\overset{r}{A}}{r\overset{0}{A}.}$$

Dieses ist also die allgemeine recurrirende Regel der Wurzelausziehung, vermöge deren, wenn man

$(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots\overset{r}{a}x^r\ldots)^n = \overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\ldots\overset{r}{A}x^r\ldots$

gesetzt hat, und nun rückwärts.

$\sqrt[n]{(\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\ldots\overset{r}{A}x^r\ldots)} = \overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots$

bestimmen will, jeden Coeffizienten der gesuchten Form, $\overset{r}{a}$, aus denen der gegebenen $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}\ldots$, und den vorhergehenden der nemlichen gesuchten Form, bestimmen kann.

Für den Anfangscoeffizienten $\overset{0}{a}$, ergibt sich ursprünglich, auf beyden Seiten $x = 0$ gesetzt, daß er $\sqrt[n]{\overset{0}{A}} = \overset{0}{A}^{\frac{1}{n}}$ seyn muß. Alle übrigen verschafft die Regel, allmälig für r die successiven ganzen Zahlen substituirt.

Und so liegt es als Factum des Calculs und unmittelbare Folge der Norm für die Potenziirung vor Augen, daß die Regel, wonach sich die Coeffizienten der gesuchten Wurzel des nten Grades aus einer gegebenen Form $= \overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1$

$+\overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$ durch den Ansatz $\sqrt[n]{(\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1 .. + \overset{r}{A}x^r ..)} = \overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1 ... \overset{r}{a}x^r ...$, angedeutet, berechnen, in sofern jeder folgende unter ihnen, aus den vorhergehenden und den bekannten Coeffizienten jener gegebenen Form, abgeleitet werden soll, vollkommen dieselbe ist, welcher gemäß sich aus den Coeffizienten der Wurzel (den a) die ihrer nten Potenz (die A) ergeben, wofern man nur statt n an die Stelle setzt $\frac{1}{n}$. Denn offenbar, sobald man in der recurrirenden Formel der Potenziirung, statt n substituirt $\frac{1}{n}$, und alsdann in ihr die Zeichen a und A verwechselt, kommt identisch unsre neue Vorschrift, welche Formel der Wurzelausziehung heißen darf, heraus.

II. Independente Formel der Wurzelausziehung.

Vermöge der eben vollendeten, allgemeinen Entwicklung ist, wenn man

$$(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r ..)^n = \overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2 .. + \overset{r}{A}x^r ..$$

setzt, alsdann aber die letztere Form als gegeben ansieht, die erste dagegen, deren nte Potenz sie seyn soll, als gesucht betrachtet, mithin $\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2 ... + \overset{r}{a}x^r .. = \sqrt[n]{(\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2 .... + \overset{r}{A}x^r ..)}$ zu finden beabsichtigt:

$$\overset{r}{a} = \frac{\left(\frac{1}{n}-r+1\right)\overset{r-1}{a}.\overset{1}{A}.. + \left(k\frac{1}{n}-r+k\right)\overset{r-k}{a}.\overset{k}{A}.. + r.\frac{1}{n}\overset{0}{a}.\overset{r}{A}}{r.\overset{0}{A}}.$$

Gesetzt man nehme an, daß die gegebene Form, welche als nte Potenz einer andern betrachtet werden soll, bloß $A+x$ gleiche, mithin im allgemeinen Ansatze $\overset{0}{A}=A$ schlechthin, $\overset{1}{A}=1$, $\overset{2}{A}$ und alle folgende Coeffizienten o seyn sollten, wie würden sich alsdann die Coeffizienten der gesuchten Form

$\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 \ldots + \overset{r}{a}x^r$, die jetzt $\sqrt[n]{(A+x)}$ darstellen müßte, berechnen?

Die allgemeine Formel würde sich, sobald nur $\overset{0}{A} = A$ und $\overset{1}{A} = 1$ reel sind, auf $\overset{r}{a} = \left(\frac{1}{n} - r + 1\right) \frac{\overset{r-1}{a}}{A}$ zusammenziehn.

Es ist aber aus der Theorie des binomischen Lehrsatzes bekannt, daß wofern $(A+x)^n = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r-1}{a} \cdot x^{r-1} + \overset{r}{a}x^r \ldots$ berechnet werden soll, $\overset{r}{a} = \frac{(n-r+1)}{r} \frac{\overset{r-1}{a}}{A}$ seyn wird, so wie wir jetzt gefunden haben daß, wenn $\sqrt[n]{(A+x)} = (A+x)^{\frac{1}{n}} = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 \ldots + \overset{r-1}{a}x^{r-1} + \overset{r}{a}x^r \ldots$ bestimmt werden muß, $\overset{r}{a} = \frac{\left(\frac{1}{n} - r + 1\right)}{r} \frac{\overset{r-1}{a}}{A}$ zu setzen ist.

Beyde Regeln sind, nur daß da, wo in der ersten n steht, um die zweyte zu erhalten gesetzt werde $\frac{1}{n}$, identisch dieselben. Wenn also vermöge der ersten allmälig für r die successiven ganzen Zahlen gesetzt, und $\overset{0}{a} = A^n$, wie sich von selbst ergibt, genommen, $\overset{1}{a} = \frac{n\,a}{A}$, $\overset{2}{a} = \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \frac{a}{A^2}$, $\overset{3}{a} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a}{A^3}$ mithin die bekannte Regel:

$$(A+x)^n = A^n + n\,A^{n-1}x^1 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-3} \cdot x^3 \ldots$$

hervortritt, so wird, wenn man in der zweyten auf gleiche Art mit r verfährt, da für

$\sqrt[n]{(A+x)} = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots$, unmittelbar ($x = 0$ gesetzt), $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}} = a$ hervorgeht, auch ferner

$$\overset{1}{a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{A},\ \overset{2}{a} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}-1\right)}{1 \cdot 2} \frac{a}{A^2},\ \overset{3}{a} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a}{A^3} \ldots$$

mithin $\sqrt[n]{(A+x)} = (A+x)^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} \cdot x$

$$+ \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}-1\right)}{1 \cdot 2} A^{\frac{1}{n}-2} \cdot x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{\frac{1}{n}-3} x^3 \ldots$$

entspringen und, wenn vorhin die Coeffizienten n, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$ durch ${}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}$, ${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}$, ${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots$ angedeutet sind, so werden die $\frac{1}{n}$, $\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1 \cdot 2}$, $\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$, ohne den Sinn der Zeichen im Mindesten zu ändern, durch ${}^{\frac{1}{n}}\overset{1}{\mathfrak{B}}$, ${}^{\frac{1}{n}}\overset{2}{\mathfrak{B}}$, ${}^{\frac{1}{n}}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots$ angezeigt werden können.

Man darf also behaupten, daß auf völlig gleiche Art, wie sich bey Berechnung von $(A+x)^n$ die Coeffizienten des gesetzmäßig entwickelten Werthes aus A und n bilden, auch bey Entwicklung von $\sqrt[n]{(A+x)} = (A+x)^{\frac{1}{n}}$, die Coeffizienten der seinen Werth darstellenden gesetzmäßigen Form erzeugt werden, oder kürzer, man hat bewiesen, daß die Regel des binomischen Satzes in Absicht auf die Coeffizientenbildung völlig dieselbe ist, der Exponent sey eine ganze und positive Zahl, n, oder irgend ein positiver Stammbruch, $\frac{1}{n}$. Am kürzesten wird dies ausgedrückt, wenn man sagt: die Regel des binomischen Satzes für $(A+x)^n$ gelte nicht bloß, wenn n eine positive ganze Zahl, sondern auch wenn es ein positiver Stammbruch ist. Ist aber dieses, so wird auch die im vori=

gen Kapitel abgeleitete Formel für die independente Bestimmung von $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots + \overset{r}{a} x^r)^n$, welche $\overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x^2 \ldots$ $+ \overset{r}{a} x^r = b$ setzend, diese Größe auf $(a + b)^n$ zurückbrachte, und durch Entwicklung dieses Ausdrucks fand, daß das Resultat eine Reihe sey, deren Anfangsglied a^n, deren rtes Glied $\overset{h}{1} \ldots r\, \Sigma({}^n\overset{h}{\mathfrak{B}} \,.\, a^{n-h} \,.\, p^r \overset{h}{C})$, auch dann gelten, wenn n ein ächter Stammbruch ist, mithin die independente Formel der Wurzelausziehung seyn.

III. Höchste Verallgemeinerung des binomischen und polynomischen Satzes.

Die Theorie der Multiplication beweist, daß, sobald n eine ganze positive Zahl ist $(a + x)^n$ durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe $= \overset{0}{A} + \overset{1}{A} x^1 + \overset{2}{A} x^2 \ldots + \overset{r}{A} x^r \ldots$ ausgedrückt werden kann, so daß $\overset{0}{A} = a^n$, $\overset{1}{A} = n \,.\, a^{n-1}, \ldots$ ist. Die Theorie der Wurzelausziehung thut dar, daß $(a + x)^{\frac{1}{n}}$ durch eine solche Reihe ausgedrückt werden kann, und daß ihre beyden ersten Glieder $a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n} - 1} x^1$ sind.

Daraus folgt; unter der Voraussetzung, daß m eine ganze positive Zahl ist, es müsse auch $(a + x)^{\frac{m}{n}}$ $= \left((a + x)^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n} - 1} x^1 + \ldots\right)^m$ eine ähnlich gebildete Reihe seyn, anhebend mit den Gliedern $a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n} - 1} x$.

Daraus ergibt sich endlich, daß auch $(a + x)^{-\frac{m}{n}}$ $= \dfrac{1}{(a + x)^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n} - 1} x \ldots}$ nach gewöhnlicher Di-

vision entwickelt, eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellen werde, deren beyde ersten Glieder $a^{-\frac{m}{n}} + \left(-\frac{m}{n}\right) \cdot a^{-\frac{m}{n}-1}x$ seyn müssen.

Will man nun in dem anfänglichen Ansatze:

$$(a+x)^n = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r-1}{A}x^{r-1} + \overset{r}{A}x^r \ldots$$

für x setzen $x+z$, so wird man

$$(a+x+z)^n = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}(x+z)^1 + \ldots \overset{r-1}{A}(x+z)^{r-1} + \overset{r}{A}(x+z)^r \ldots$$

erhalten, und $a+x$ zur Abkürzung b nehnend,

$$(b+z)^n = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}(x+z)^1 + \ldots \overset{r-1}{A}(x+z)^{r-1} + \overset{r}{A}(x+z)^r \ldots$$

bekommen.

Beydes sind noch unentwickelte Ausdrücke in denen man z als Hauptgröße betrachten kann, die sich nach früheren Regeln, fortschreitend in successiven Potenzen von z, müssen entwickeln lassen, und in denen alsdann gleichhohe Glieder identisch seyn müssen.

Macht man den Anfang der Arbeit, so ist das Anfangsglied disseits, aus $(b+z)^n$ entstehend b^n; jenseits der Inbegriff aller Anfangsglieder aus den dort geforderten Entwicklungen, die einzigen, welche noch kein z enthalten und deshalb zu einem Hauptgliede gehören: zusammen $\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \ldots \overset{r-1}{A}x^{r-1} + \overset{r}{A}x^r \ldots$ Daß diese Form mit $b^n = (a+x)^n$ identisch ist, versteht sich in Gemäßheit des anfänglichen Ansatzes von selbst.

Das erste nachfolgende z^1 enthaltende Glied disseits ist $n b^{n-1} z^1$; das erste z^1 in sich führende Glied jenseits, zusammengelesen aus allen ersten nachfolgenden Gliedern der dort verlangten, sich durch Addition verbindenden, complexen Größen, dem elementaren binomischen Satze gemäß:

$$(\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x \ldots (r-1)\overset{r-1}{A}x^{r-2} + r\overset{r}{A}x^{r-1})\, z.$$

Die Identität beyder, verlangt Identität ihrer Coeffizienten. Es wird also

$n b^{n-1} = n(a+x)^{n-1} = \overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x \,..+ (r-1)\overset{r-1}{A}x^{r-2}$
$+ r\overset{r}{A}x^{r-1}$ .. seyn.

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man auf beyden Seiten mit $a+x$ multiplicirt. Man erhält alsdann disseits:
$n(a+x)^n = n\overset{0}{A} + n\overset{1}{A}x^1 \ldots + n\overset{r-1}{A}x^{r-1} + n\overset{r}{A}x^r$
Auf der andern Seite wird man $\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x \,..+ (r-1)\overset{r-1}{A}x^{r-2}$
$+ r\overset{r}{A}x^{r-1} \ldots$ würklich mit $(a+x)$ zu multipliciren haben.

Geschieht dieses, so erhält man ein Product, dessen Anfangsglied $a\overset{1}{A}$, dessen $r-1$tes Glied $(r\overset{r}{A}.a + (r-1)\overset{r-1}{A})x^{r-1}$ seyn wird.

Soll nun dieses Product mit dem entwickelten $n(a+x)^n$ identisch seyn, so müssen nicht allein ihre Anfangsglieder $n\overset{0}{A}$ und $a\overset{1}{A}$ zusammenfallen, sondern auch allgemein ihre $r-1$ten Glieder, $n\overset{r-1}{A}$ und $r\overset{r}{A}a + (r-1)\overset{r-1}{A}$.

Aus dem Ersten folgt $\overset{1}{A} = \frac{n\overset{0}{A}}{a}$

Aus dem letzten $\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{r}\frac{\overset{r-1}{A}}{a}$, worunter für $r=1$ selbst das Erste enthalten ist.

Es ist also nun, was auch n seyn möge, bewiesen, daß man $(a+x)^n = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 \,..+ \overset{r-1}{A}x^{r-1} + \overset{r}{A}x^r \ldots$ setzen darf, und daß jedesmal $\overset{0}{A} = a^n$, $\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{r}\frac{\overset{r-1}{A}}{a}$ seyn werde. —

Dieses ist aber vollkommen die Grundregel des elementaren binomischen Lehrsatzes, recurrirend ausgedrückt, welche jetzt also, mag der Exponent n ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn, als unbedingt geltend bewiesen ist.

Ist aber die binomische Formel eben so allgemein, als der Begriff der Potenz, alle möglichen Zahlen als Exponenten gestattend, so ist auch diejenige independente Lösung der Aufgabe des Polynomischen Satzes, welche $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 \ldots + \overset{r}{a}x^r.)^n$ zu berechnen, $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots \overset{r}{a}x^r = b$ setzte, zuvörderst also nur $(a+b)^n$ berechnete, darin hernach für die successiven Potenzen von b ihre bekannten ursprünglichen Werthe substituirte, und auf solche Art

$$(a + \overset{1}{a}x \ldots + \overset{r}{a}x^r)^n = a^n \ldots\ldots 1 \overset{h}{\ldots} r\; \Sigma\, ({}^n\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{n-h} p^r \overset{h}{C})\; x^r$$

erhielt, für jedes n von unbedingter Allgemeinheit.

Und da wiederum aus dieser die recurrirende Regel folgt, daß, wenn $(a + \overset{1}{a}x \ldots\ldots \overset{r}{a}x^r)^n = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 \ldots + \overset{r-1}{A}x^{r-1} + \overset{r}{A}x^r \ldots$ ist, alsdann $\overset{0}{A} = a^n$ und allgemein:

$$\overset{r}{A} = \frac{(n - r + 1)\overset{r-1}{A}\overset{1}{a} \ldots + (kn - r + k)\overset{r-k}{A}\overset{k}{a} \ldots + rn\overset{0}{A}\overset{r}{a}}{ra}$$

so gilt auch diese Regel für jeden Werth, den man dem Exponenten n beylegen mögte.

Daß aber weder die erste independente, noch die zweyte recurrirende Bestimmung in Absicht auf die Coeffizientenberechnung irgend eine Aenderung zu leiden hat, wenn man bey Bildung der zu potenziirenden Grundform, die höchste Allgemeinheit des Ausdruckes in Absicht auf die Potenzen der Hauptgrößen in ihren einzelnen Gliedern eintreten läßt, dem gemäß also $\overset{0}{a}x^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{a}x^{\alpha+r\delta} \ldots)^n$ zu berechnen verlangt, und in solchem Fall nur zu bemerken braucht, daß

im Anfangsgliede des Resultats $x^{nα}$, allgemein im rten nach ihm $x^{nα+rδ}$ vorkommen werde, ist bereits früher dargethan worden.

IV. Bemerkungen über Potenzirungen, bey denen die Exponenten Brüche oder negative Zahlen sind.

Sobald der Exponent einer zu entwickelnden Potenz eine negative oder gebrochene Zahl ist, kann die geforderte Potenzirung nie genau und durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden; man muß sich begnügen eine Form zu finden, die den Forderungen der vorgegebenen Operation Genüge leistet, sofern man auf das, was über einen gewissen Grad hinausgeht, keine Rücksicht bey der Rechnung nehmen will. — Es ist, um bey dem nachherigen Gebrauche dieser allgemeinen Regel, in Beziehung auf Näherungen die sie gestattet, keine unrichtige Idee zu fassen, sehr wesentlich, ihre eigentliche Bedeutung in dieser Rücksicht deutlich zu begreifen. Soll eine Grundform auf die Potenz eines ganzen negativen Exponenten erhoben werden, $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 .. + \overset{r}{a}x^r)^{-n}$, so muß man in völliger Strenge, die Forderung für unmöglich erklären; was gegeben seyn soll, muß Anfang und Ende haben, und eine endliche Form, die das verlangte Resultat darstellte, läßt sich nicht ausfindig machen. Will man aber eine Form haben die bis zu einem willkührlich gewählten Grade hinauf, mag er so hoch seyn, als man verlangt, der Forderung jenes Ausdrucks Genüge leistet, so kann man dies allerdings.

Wenn z. E. $(\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 ..)^{-n}$ durch die Vorschriften des polynomischen Lehrsatzes bis zum mten Grade entwickelt, $A + \overset{1}{A}x^1 .. + \overset{m}{A}x^m$ gefunden wird, so bedeutet dies eigentlich, daß diese Form, zur Potenz des Grades $+n$ erhoben,

in der That die Anfangs gegebene $(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\,..\,\overset{r}{a}x^r)$, sofern man bey der Vergleichung nur bis auf die Glieder des $m$ten Ranges inclusive fortschreiten will, hervorbringt. Es ist also eigentlich nicht gestattet, sich des Gleichheitszeichens zwischen dem Ausdrucke der Potenz, welche sich entwickeln soll, und der daraus hervorgehenden Form zu bedienen, und etwa, wie gewöhnlich zu geschehen pflegt, $(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\,..)^{-n}$ $=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\,..+\overset{m}{A}x^m$ zu setzen. Eben so wenig hilft es, wenn man etwa das würklich Entwickelte nur als einen Anfang der ganzen Arbeit betrachten, und durch ein nachfolgendes $+\,..$ zu verstehen geben wollte, daß an dem aufgestellten Resultate nur noch Etwas, der Entwicklung nicht Unterzogenes fehle. Denn was sich in einer vorgeschriebenen Gestalt gar nicht darstellen läßt, davon kann man auch nicht den Anfang der Darstellung geben. Will man die gefundene Form würklich als Resultat einer Potenziirung ansehn, und das Gleichheitszeichen bewahren, so muß man sich gefallen lassen, daß die zu entwickelnde Größe selbst geändert werde. Es kann nur dann $(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^1+\,..+\overset{r}{a}x^r)^{-n}$ $=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\,..+\overset{m}{A}x^m$ gesetzt werden, wenn es gestattet ist, der Größe $(a+\overset{1}{a}x^1+\,..+\overset{r}{a}x^r)^{-n}$ eine andere beyzufügen, welche anhebt mit dem nächsthöherem Grade zu dem womit das entwickelte Resultat endigt, so daß, wenn wir eine solche durch $\overset{1}{\alpha}x^{m+1}+\overset{2}{\alpha}x^{m+2}\,..+\overset{mr}{\alpha}x^{mr}$ andeuten wollen, die Gleichung nur in dieser Gestalt $(a+\overset{1}{a}x^1\,..+\overset{r}{a}x^r)^{-n}$ $-(\overset{1}{\alpha}x^{m+1}\,..+\overset{mr}{\alpha}x^{mr})=A+\overset{1}{A}x^1\,..+\overset{m}{A}x^m$ bestehen kann.

Auf eine ähnliche Weise, wenn eine Potenz mit gebrochenem positiven Exponenten entwickelt werden soll, und das Resultat nach der Formel des polynomischen Lehrsatzes

Neuntes Kapitel.

Entwicklung der Exponenzialgrößen.

Die Form der Potenz ist noch einer ganz andern Ansicht fähig, als diejenige, welche bey ihrer Entwicklung durch den binomischen oder polynomischen Lehrsatz zum Grunde gelegt wurde. Wir haben nemlich im Vorhergehenden die Hauptgröße, nach deren Potenzen folglich die Entwicklung fortschreiten mußte, in den Grundfactor, oder die Wurzel der Potenz übertragen, den Exponenten hingegen als eine Nebengröße angenommen, so daß eben deswegen er nur zu der Bildung der Coeffizienten mitwürken konnte, welche den Gliedern der Reihe beygegeben werden mußten, durch die sich der Werth des Ausdrucks darstellte. Aber es ist eben so gut gestattet, die Wurzel der Potenz als Nebengröße, ihren Exponenten hingegen als Hauptgröße anzunehmen. Alsdann aber legt man sich eben dadurch die Verpflichtung auf, den Werth der Potenz, wenn es überall möglich ist, in einer Reihe darzustellen, in welcher der Grundfactor nur zu den Coeffizienten beyträgt, während der Exponent die Hauptgröße hergibt, nach deren Potenzen die Reihe selbst fortschreitet. Es ist nicht überflüssig diese verschiedene Ansicht der nemlichen Zahlenform, weil sie auf den Gang ihrer Entwicklung wesentlichen Einfluß hat, durch besondre Kunstwörter festzuhalten. Eine Potenz, bey welcher die Hauptgröße nur in dem Grundfactor liegt, mag ihren bisherigen Namen behalten. Eine Potenz hingegen, bey welcher die Hauptgröße auf irgend eine Weise im Exponenten erscheint, soll die Benennung einer Exponenzialgröße führen.

I. Fundamentalaufgabe für die Entwicklung von Exponenzial-Größen.

Die einfachste, zu einer Entwicklung Anlaß gebende Form der eigentlichen Potenz war $(1+x)^n$; ihr Resultat gibt der bino-

mische Lehrsatz. Wollten wir sie als Exponenzialgröße betrachten, so müßte die Bezeichnung geändert werden, insofern wir die einmal angenommene Gewohnheit beybehalten wollen, Nebengrößen durch die ersten, Hauptgrößen durch die letzten Buchstaben des Alphabets anzudeuten. So würde sie etwa durch $(1+a)^x$ bezeichnet werden müssen. Diese Aenderung der Zeichen hindert nun keinesweges, den binomischen Lehrsatz, welcher für alle Werthe, die der Exponent x bekommen mögte, unbedingte Gültigkeit besitzt, auf sie anzuwenden, und die ihm gemäß geformte Reihe

$$1+x.a+\frac{x.(x-1)a^2}{1.2}..+\frac{x.(x-1)..[x-(r-1)]a^r}{1.2.r}..$$

würde als materiel richtig anerkannt werden müssen. Aber der Verstoß gegen die Form spränge auf den ersten Blick in die Augen. Denn es ist eine Nebengröße, nach deren Potenzen die Reihe fortgeht, und ihre Coeffizienten enthalten, in Ausdrücken, die immer verwickelter werden, diejenige, welche als Hauptgröße den Fortschritt der Reihe regieren sollte.

Wir haben also die Frage aufzuwerfen, ob nicht vielleicht die binomische Reihe selbst so umgewandelt werden kann, daß sie aus ihrer bisherigen Gestalt in die jezt beabsichtigte übergeht. Und davon ist die Möglichkeit im Allgemeinen nicht schwer zu entdecken.

Es sind die Binomialcoeffizienten, welche in ihren Zählern unsre gegenwärtige Hauptgröße enthalten. Diese Zähler sind, in Beziehung auf sie, nichts anders als Producte aus mehreren Formen des ersten Grades. Jedes von ihnen läßt sich durch würkliche Multiplication berechnen, und die daraus entspringenden Formen, mit den in den einzelnen Gliedern zu ihnen als Factoren gehörigen Nebengrößen versehn, lassen sich in eine Summe zusammenziehn. So entspringt aus dem ersten Gliede der binomischen Reihe x. a, die Form a.x, aus dem zweyten $\frac{x.(x-1)a^2}{1.2}$ die Form $\frac{a^2}{2}x^2-\frac{a^2}{2}x$, aus

dem dritten $\frac{x(x-1)(x-2)a^3}{1.2.3}$ die Form $\frac{a^3x}{3} - \frac{a^3x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{6}$, und so ließen sich auch die folgenden Glieder von ihr durch gemeine Multiplication in Formen auflösen, welche regelmäßig nach Potenzen von x fortschreiten, und sich also zu einer einzigen ähnlichen zusammenziehn lassen würden.

Aber es ist mehr als eine Schwierigkeit bey diesem Geschäfte, welche vorher erwogen zu werden verdient. Zuerst entsteht wohl die Frage: ist überhaupt auf diesem Wege eine allgemeine Formel möglich? Sobald der Exponent x eine negative oder gebrochene Zahl ist, schließt sich die binomische Reihe nicht, ebensowenig also auch wird sich alsdann die Exponenzialreihe schließen können. Aber wenn der Exponent eine ganze positive Zahl seyn soll, so schließt sich die binomische Reihe allerdings; es scheint also alsdann auch die Exponenzialreihe abbrechen zu müssen, und dies ist unmöglich, wenn sie unter einer einzigen Form enthalten seyn soll. Diese Schwierigkeit kann gehoben werden. Es ist erlaubt, die Formel des binomischen Lehrsatzes für jeden Fall in unbestimmte Weite hinaus zu gebrauchen, und jeder nach ihr berechneten Potenz so viele Glieder beyzulegen als man will, wenn nur jedes dieser Glieder nach ihrer Vorschrift berechnet wird. So ist ganz richtig von $(1+a)^2$ das tausendste Glied $\frac{2.(2-1)..(2-999)a^{1000}}{1 . . . 1000}$, denn der Coeffizient dieses Gliedes, wenn man ihn würklich berechnet, hat o zum Factor. Man darf also, auch für ganze positive Exponenten die Reihe des binomischen Lehrsatzes als eine unbestimmt fortlaufende betrachten.

Eben daraus aber entspringt eine zweyte Schwierigkeit. Jedes Glied der binomischen Reihe, wenn man den Zähler seines Coeffizienten durch würklich angestellte Multiplication auflöst, verwandelt sich in eine Form, die nach Potenzen von x fortschreitet. Wir werden sogleich sehn, daß jede von

diesen Formen mit der ersten Potenz von x anhebt, und regelmäßig durch die nächsthöheren fortgeht. Solcher Formen, die sich zuletzt in eine Summe zusammenziehn sollen, wird es also eine unbestimmt fortlaufende Menge geben. Und eben darum wird auf diesem Wege keiner von den einzelnen Coeffizienten, die den Gliedern jener Summe beygelegt werden müssen, als eine genau bestimmte, völlig geschlossene Größe dargestellt werden können; jeder wird als eine Reihe einzelner Theile erscheinen, welche nur willkührlich abgebrochen ist, und bey weiterer Fortsetzung der ganzen Entwicklung auch noch fernere Zusätze bekommen haben würde. Diese Schwierigkeit ist bey dem unmittelbaren Uebergange von der binomischen Reihe zur Exponenzialreihe nicht zu vermeiden; jeder Coeffizient der letzteren muß dabey als eine, der vollständigen, geschloßnen Entwicklung nicht fähige Größe, eben so wie die ganze Reihe selbst, angesehn werden, und wir müssen uns für den Anfang begnügen, nur das Gesetz zu ergreifen, wonach sich die Entwicklung der einzelnen Coeffizienten in ihrem Fortschreiten erhalten. Ob diese Coeffizienten würklich bestimmte Zahlen sind, deren Werthe in geschlossenen Ausdrücken angegeben werden können, läßt sich erst später beurtheilen.

Wir wollen den Anfang der vorzunehmenden Umformung damit machen, daß wir das erste Glied der verlangten Exponenzialreihe, deren Anfangsglied 1 seyn wird, dasjenige also, was in x^1 multiplicirt seyn muß, zu bestimmen suchen; ein Geschäft, wobey es bloß darauf ankommt, die einzelnen Theile, woraus sich der Coeffizient desselben zusammensetzt, allmälig zusammen zu finden, und die Regel, welche in ihrem Fortschritt herrscht, zu entdecken. Nun gibt jedes Glied der binomischen Reihe, wenn man die Zähler des in ihm enthaltenen Binomialcoeffizienten entwickelt, einen Theil, welcher in x^1 multiplicirt ist; es entsteht also, allgemein, der rte Theil des Coeffizienten, der zu x^1 gehört, aus dem

rten Gliede der binomischen Reihe. Bekanntlich ist von $(1+a)^x$ das rte Glied $= \frac{x.(x-1)..(x-[r-1)]a^r}{1.2.r}$.

Wir brauchen von dem Producte, welches aus der Entwicklung des Zählers in seinem Coeffizienten entspringt, nur das niedrigste Glied. Der erste Factor jenes Products ist x selbst, jeder der andern ist eine Form des ersten Grades, und es sind die negativen ganzen Zahlen nach der Reihe, welche die zweyten Theile dieser Factoren bilden. Das niedrigste Glied eines Products erwächst aus denen seiner Factoren; man multiplicire also x mit jenen letzten Theilen der übrigen Factoren $(-1).(-2)..[-(r-1)]$ und man erhält das Verlangte. Dazu muß der Nenner des Coeffizienten, und die Potenz a^r, zu welcher er als Factor gehört, gefügt werden $\frac{(-1).(-2)..[-(r-1)]a^r}{1.2..r}$. Dieser Ausdruck ist noch einer Abkürzung fähig. Man sondre von jedem der negativen Factoren im Zähler (- 1) ab, und ziehe diese ihre Multiplicatoren in ein Product $(-1)^{r-1}$ zusammen. Alsdann enthält der Nenner alle Factoren des Zählers, und noch einen, um eine Einheit, als der höchste von ihnen, größeren. So wird sich also, durch Aufheben der gemeinschaftlichen, der Ausdruck auf $(-1)^{r-1}.\frac{1}{r}a^r$ zusammenziehn. In ihm ist das Gesetz der Reihe vollständig enthalten, wodurch sich, in fortgehender Entwicklung, der Coeffizient für x^1 ausdrücken wird. Man setze für r die successiven ganzen Zahlen, so erhält man allmälig jedes Glied von ihr. Es stellt also $a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}....(-1)^{r-1}\frac{a^r}{r}..$ den Inbegriff derjenigen Größen dar, die sich als Entwicklung der Größe ergeben, welche den Coeffizienten des ersten Gliedes der Exponenzialreihe für $(1+a)^x$ ausmacht.

Auf ähnliche Weise, wie wir für den ersten Coeffizienten der Exponenzialreihe einen Ausdruck gefunden haben, läßt sich ein solcher auch für jeden folgenden erhalten. Nur werden die Beziehungen verwickelter, und bedürften, um auf eine einfache Gestalt zurückzukommen, fernerer Untersuchungen. Man stelle sich wieder die anfängliche binomische Reihe vor.

$1 + {}^{x}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{1} + {}^{x}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{2} \ldots + {}^{x}\overset{n}{\mathfrak{B}}\, a^{n} \ldots + {}^{x}\overset{n+r}{\mathfrak{B}}\, a^{n+r}$, und verlange jetzt allgemein den Coeffizienten zu x^{n}, welchen die Umformung geben wird. Dem bekannten Gesetze der Binomialcoeffizienten gemäß kommt diese Potenz von x zuerst bey der Entwicklung des nten unter ihnen selbst, nachher aber bey der jedes folgenden gleichfalls in einem Gliede der daraus entspringenden, nach x geordneten, Formen vor. Will man also, allgemein, des Coeffizienten, welcher x^{n} angehören wird, rten Theil haben, so nehme man das rte unter den Gliedern der binomischen Reihe, in welchen x^{n} zu finden seyn soll, d. h. das rte nach dem, worin es zuerst anzutreffen war, mithin das n + rte vom Anfang, ${}^{x}\overset{n+r}{\mathfrak{B}}\, a^{n+r}$. Man entwickle den Zähler des Coeffizienten in eine nach Potenzen des x fortschreitende Form, behalte aber aus dieser, mit beygegebenem Nenner und zweytem Hauptfactor a^{n+r}, bloß den Theil, in dem sich x^{n} befindet, und man hat das Gesuchte.

Nun aber ist der Zähler ein Product aus den zweytheiligen Formen des ersten Grades, $(x-0)(x-1),..[x-(n+r-1)]$. Es muß aus dem Vorhergehenden bekannt seyn, wie sich jedes Glied eines solchen Productes bildet. Seine Coeffizienten sind Combinations-Inbegriffe aus den zweyten Theilen der Factoren, als unwiederholbaren Elementen, zu einer Classe gehörig, deren Rang, mit dem Grade der Potenz, der sie als jedesmaliger Coeffizient angehören, die Anzahl der überall vorhandenen Factoren ausmacht. In Zeichen: bey dem oben angedeuteten Producte hat x^{n} zum Coeffizienten $\overset{r}{C}[0, (-1),$

$(-2)\ldots-(n+r-1)]$. Fügt man diesem, aus dem Zähler hervorgehobenen Theile, den Nenner, und die zugehörige Potenz von a bey, so erhält man allgemein, als das $r$te Glied der Reihe, in welche sich der $n$te Coeffizient der Exponenzialreihe entwickelt, $\frac{\overset{r}{C}[-1,-2,\ldots-(n+r-1)]a^{n+r}}{1.2\ldots(n+r)}$. Die Möglichkeit einer independenten Bestimmung für die gewünschte Exponenzialreihe ist also nachzuweisen.

Aber dieser Ausdruck, obschon, vermöge seiner, jeder einzelne Coeffizient berechnet werden kann, ist sehr verwickelt. Nun darf man zwar allerdings vermuthen, daß sich, bey würklich angestellter Berechnung, Zusammenziehungen machen lassen werden, wie sie, für $n=1$, d. h. für den ersten Coeffizienten der Exponenzialreihe würklich im Vorhergehenden geleistet worden sind. Aber es mögte schwer seyn, durch eine directe Betrachtung dazu den Weg zu finden. Und da ohnehin für die würkliche Berechnung die recurrirende Bestimmung immer bequemer ist, als die independente, so bildet sich die Frage von selbst, ob nicht, da die Möglichkeit und Bestimmtheit der Exponenzialreihe keinem Zweifel unterliegt, unter den successiven Coeffizienten dieser Reihe ein gegenseitiger Zusammenhang statt hat, so daß ihre Beziehung recurrirend ausgedrückt werden könnte; wobey der erste von ihnen, welcher natürlich keine Recursion geben kann, als gefunden im Vorhergehenden vorausgesetzt werden müßte. Die independente, eben abgeleitete Formel, berechtigt uns, zu setzen, daß, wenn unter $\overset{1}{A}, \overset{2}{A},\ldots\overset{r}{A}$, Größen verstanden werden, die von der Zahl a abhängen, und von denen namentlich die erste,

$$\overset{1}{A}=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+(-1)^{r-1}\frac{a^r}{r}+\ldots \text{ ist,}$$

$$(1+a)^x=1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2\ldots+\overset{r}{A}x^r\ldots$$

angenommen werden darf.

Die Methode, wobey man die Hauptgröße, nach deren Potenzen die Entwicklung fortschreitet, und die jedes beliebigen Werths fähig seyn soll, als einen Zuwachs annehmend gedenkt, welcher übrigens so wiesieselbst unbestimmt bleibt, dabey auf der anfänglichen Identität besteht, auch wenn man jenen Zuwachs als Hauptgröße ansehn, und nach seinen successiven Potenzen ferner entwickeln wollte, führt auch hier sehr kurz zum Zweck.

Ist $(1+a)^x = 1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r + \overset{r+1}{A}x^{r+1} \ldots,$ so ist auch

$$(1+a)^{(x+z)} = 1 + \overset{1}{A}(x+z)^1 + \overset{2}{A}(x+z)^2 \ldots + \overset{r}{A}(x+z)^r + \\ + \overset{r+1}{A}(x+z)^{r+1}$$

Aber $(1+a)^{(x+z)} = (1+a)^x . (1+a)^z$. Setzt man für jeden dieser Factoren seinen Werth aus der Grundformel, so erhält man:

$$(1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots) : (1 + \overset{1}{A}z^1 + \overset{2}{A}z^2 \ldots + \\ \overset{r}{A}z^r \ldots) = 1 + \overset{1}{A}(x+z) + \overset{2}{A}(x+z)^2 \ldots + \overset{r}{A}(x+z)^r + \\ + \overset{r+1}{A}(x+z)^{r+1} \ldots$$

Entwickelt man das disseitige Product, nach Potenzen von z anordnend, so wird das Anfangsglied:

$$(1 + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots).$$

Entwickelt man im jenseitigen Ausdrucke, alle Anfangsglieder aus den darin enthaltenen Potenzen von $x+z$ zusammenfassend, das daraus entstehende totale Anfangsglied, so wird es von selbst identisch das nemliche.

Ferner wird das in z^1 multiplicirte, also erste nachfolgende, Glied disseits:

$$(\overset{1}{A} + \overset{1}{A}\overset{1}{A}x + \overset{1}{A}\overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{1}{A}\overset{r}{A}x^r \ldots)z$$

das gleichfalls in z^1 multiplicirte jenseits, als Summe aller ersten nachfolgenden Glieder, die aus den dort verlangten

successiven Potenzen der Größe $x+z$ hervortreten, ist:
$(\overset{1}{A}+2\overset{2}{A}x^{1}+\ldots . r\overset{r}{A}x^{r-1}+(r+1)\overset{r+1}{A}x^{r}\ldots)z^{1}$.
Die nothwendig anzunehmende Identität beyder Glieder verlangt Identität der Formen, wodurch sich ihre Coeffizienten ausdrücken, mithin, daß allgemein das rte Glied der einen $=\overset{1}{A}\overset{r}{A}x^{r}$ dem rten der andern $(r+1)\overset{r+1}{A}.x^{r}$ seyn muß. Daraus ergibt sich sogleich $\overset{r+1}{A}=\overset{r}{A}.\frac{\overset{1}{A}}{r+1}$, eine Recursion der allereinfachsten Art. Man erhält jeden folgenden Coeffizienten, wenn man den nächstvorhergehenden aufs Neue mit dem ersten multiplicirt, und dies Product durch die Zahl des gesuchten dividirt. Es bedarf wohl keiner Entwicklung, daß demgemäß die successiven Coeffizienten nichts anders, als successive Potenzen des ersten, dividirt durch die Permutationszahlen der eigenen Grade werden müssen, daß also $\overset{r+1}{A}=\frac{\overset{1}{A}{}^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}$ ist, in welcher Formel, $\overset{1}{A}$ als bekannt aus ursprünglicher Betrachtung vorausgesetzt, sich die independente Bestimmung des Gesuchten in höchster Einfachheit darstellt. Man hat also:

$$(1+a)^{x}=1+Ax+\frac{A^{2}x^{2}}{1.2}+\frac{A^{3}x^{3}}{1.2.3}+\ldots\frac{A^{n}x^{n}}{1.2..n}+\ldots$$

wobey $A=a-\frac{a^{2}}{2}+\frac{a^{3}}{3}-\frac{a^{4}}{4}+\ldots\frac{(-1)^{n-1}.a^{n}}{n}+\ldots$

Dieser erste Coeffizient der Exponenzialreihe, von welchem alle folgenden abhängen, ist als eine besonders wichtige Zahl bey dem Gebrauche der Reihe anzusehn. Er hängt lediglich von dem Grundfactor oder der Basis, $1+a$, ab, welchen man für die zu berechnende Potenz angenommen hat, und ändert sich nicht, so lange diese Basis beybehalten wird, welches auch der Exponent der Potenz seyn möge. Nun pflegt man alle Potenzen, die aus demselben Grundfactor entstehn, als zu einem

Potenzensystem gehörig zu betrachten. Und in sofern darf man sagen: für jedes besondre Potenzensystem hat der erste Coeffizient der Exponenzialreihe, und mit ihm jeder folgende, einen unabänderlichen Werth. Zur Abkürzung wollen wir ihn den **Modulus** des Potenzensystems nennen. Es ist also der Modulus eines Potenzensystems eine bestimmte, von der Basis desselben abhängige Zahl; wird die Basis durch $1+a$ ausgedrückt, so entwickelt sich der Modulus durch die Reihe

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots = A.$$

Die Exponenzialreihe selbst macht es uns möglich, umgekehrt, für jeden beliebigen Werth, welchen der Modulus haben soll, und aus ihm, zu finden, welcher zugehörige Werth der Basis gegeben werden muß. Denn man setze in dieser Reihe

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \ldots \frac{A^nx^n}{1.2..n} + \ldots$$

für x den Werth 1 an die Stelle, so wird sie

$$1 + a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \ldots \frac{A^n}{1.2..n} + \ldots$$

gestattet es also, den Modulus A anzunehmen, und aus ihm die Basis $1+a$, für welche er gehört, zu bestimmen. Unsre Kenntniß der Beziehungen zwischen Basis und Modulus, sofern sie ohne geschlossene arithmetische Ausdrücke, durch Entwicklung in Reihen, gegeben werden kann, ist diesem gemäß vollständig, und beruht in den beyden vorhiu entwickelten Hauptformeln

$$\text{Modul. bas.}(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots \frac{(-1)^{n-1}a^n}{n} + .$$

$$\text{Basis Modul. } A = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots \frac{A^n}{1.2..n} + \ldots$$

und diese beyden Specialformeln, verbunden mit der Grundformel $(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} \ldots + \frac{A^nx^n}{1..n} \ldots$ machen die Grundlage aller analytischen Betrachtungen und Berechnungen, welche Potenzen als Exponenzialgröße betreffen, aus.

II. Das natürliche Potenzensystem.

Sofern ein Potenzensystem aus der Exponenzialreihe berechnet werden soll, und es übrigens der Willkühr überlassen bleibt, welche Basis man ihm unterlegen will, erscheint dasjenige unläugbar als das einfachste, für welches A = 1, mithin die Basis $1 + a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} \ldots + \frac{1}{1.2..n} \ldots$ ist.

Wir wollen inskünftige den Werth von $1 + a$, welcher sich auf diese Art aus A entwickelt, durch den Buchstaben e andeuten. Ob und wieweit er würklich dargestellt werden kann, davon wird nachher bey der Theorie der numerischen Berechnung der Potenzensysteme die Rede seyn.

Unter der Voraussetzung, daß es in der That eine bestimmte Zahl e gebe, für welche A = 1 wird, gilt für ein System, welches diese Zahl e zur Basis erhält, die Formel:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} \ldots \frac{x^n}{1..n} + \ldots$$

Sie ist augenscheinlich die einfachste Gestalt, unter welcher in Absicht auf die Coeffizienten, die Exponenzialreihe erscheinen kann, und deswegen hat man das Potenzensystem, welchem sie angehört, das natürliche genannt. In älteren Schriftstellern führt es den Namen des hyperbolischen. Die theoretische Analysis bedient sich in ihren Entwicklungen ausschließlich dieses natürlichen Potenzensystems.

Denkt man sich ein System von Potenzen in diesem natürlichen Systeme als berechnet, so wird es leicht seyn, auch für jede andre Exponenzialgröße, deren Basis willkührlich angenommen seyn mag, b^x, den Werth zu entwickeln. Man nehme die Basis dieses Systems, b, und suche die Potenz des natürlichen Systems auf, deren berechneter Werth ihr gleich kommt. Sie sey $e^B = b$. Alsdann ist $b^x = (e^B)^x = e^{Bx}$, und man hat also

$$b^x = e^{Bx} = 1 + Bx + \frac{B^2 x^2}{1.2} .. + \frac{B^n x^n}{1.2..n} + ..$$

Es kommt in der theoretischen Analysis selten vor, daß ein andres Potenzensystem als das natürliche im Ganzen oder im Einzelnen berechnet werden soll. Einige nähere Modificationen der zu dieser Absicht eben gegebenen Formel wird das nächste Kapitel enthalten.[4]

III. Die allgemeine Aufgabe, im natürlichen System eine Potenz zu entwickeln, deren Exponent selbst eine nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortschreitende Form seyn soll, kann nun ohne Schwierigkeit gelöst werden.

A. Soll dies durch independente Bestimmung geschehn, so nehme man den allgemeinen Ausdruck:

$$e^{\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots}$$

setze für den Augenblick seinen Exponenten:

$$\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots = z$$

so hat man die Fundamentalform e^z, welche durch die bereits abgeleitete Grundreihe:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2}\ldots + \frac{z^n}{1\ldots n}\ldots$$

entwickelt werden kann.

Man nehme nun die einzelnen Glieder dieser Reihe, setze in jedem derselben für z seinen ursprünglichen Werth zurück:

$$1 = 1$$

$$z = (\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots)^1$$

$$\frac{z^2}{1.2} = \frac{1}{1.2}(\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots)^2$$

$$\frac{z^n}{1.2..n} = \frac{1}{1.2..n}(\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2\ldots+\overset{r}{a}x^r\ldots)^n$$

und entwickle alle diese Ausdrücke, um ihre Summe in eine einzige, nach Potenzen von x fortschreitende Form zusammenzuziehn. Es kommt dabey nur darauf an, Potenzen von ganzen und positiven Exponenten zu berechnen. Allgemein

werde von der resultirenden Form das Glied verlangt, welches x^n enthalten soll. Jedes Glied der einfachen Exponenzialreihe, vom ersten, worin z^1 vorkommt, bis zum $n$ten, welches z^n in sich schließt, gibt, bey der Substitution des angenommenen Werthes für $z = \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ einen Theil her, welcher in x^n multiplicirt seyn wird. Es setzt sich also der geforderte Coeffizient aus eben so vielen Theilen zusammen, und wir werden allgemein sagen dürfen, daß aus dem $h$ten Gliede der Exponenzialreihe, $\frac{z^h}{1.2..h}$, wenn wir es entwickeln, der $h$te Theil desselben seinen Ursprung nehme, vorausgesetzt, daß h eine Zahl, die zwischen 1 und n liegt, bedeuten soll. Die Frage aber, wie das Glied aus $z^h = (\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)^h$, in welchem x^n vorkommt, beschaffen sey, beantwortet sich leicht aus der einfachsten Regel des polynomischen Lehrsatzes. Die Coeffizienten von z^h sind Combinationen der $h$ten Classe aus den Coeffizienten der Grundform als Elementen; die Summe, wozu sie gehören sollen, zeigt die Potenz von x an, deren Coeffizienten man fordert. In Zeichen: der Coeffizient zu x^n aus $\frac{z^h}{1..h}$ wird seyn $\frac{{}^n p \overset{h}{C}}{1.2..h}$. In diesem Ausdrucke also hat man den $h$ten Theil der Größe gefunden, welche bey vollständiger Entwicklung unsrer Potenz zu x^n als Coeffizient gehören wird, so daß also dieser ganze Coeffizient durch das Zeichen ${}^{1..n}\overset{h}{\Sigma}\left(\frac{{}^n p \overset{h}{C}}{1.2..h}\right)$ angedeutet werden kann. Es ist also die ganze Regel der Berechnung in folgendee Formel enthalten.

Um $\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form aufzulösen, nehme man die Coeffizienten der Grundform $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{r}{a}, \ldots$ als wiederholbare Elemente, aus denen Combinationsformen gebildet werden sollen, und die Reihe

$$1 + {}^1p\overset{1}{C}x + \left(\frac{{}^2p\overset{2}{C}}{1.2} + {}^2p\overset{1}{C}\right)x^2 + \left(\frac{{}^3p\overset{3}{C}}{1.2.3} + \frac{{}^3p\overset{2}{C}}{1.2} + {}^3p\overset{1}{C}\right)x^3 \ldots$$

$$\left[1 \overset{h}{\ldots} r\, \Sigma\left(\frac{{}^rp\overset{h}{C}}{1.2\ldots h}\right)\right] x^r$$

gibt die geforderte Entwicklung.

Hätte die Form der angenommenen Exponenten ein Glied enthalten, worin gar keine Potenz der Hauptgröße vorgekommen wäre, so würde es am einfachsten gewesen seyn, die Potenz als das Product zweyer andern zu betrachten, so daß jenes Anfangsglied des Exponenten dem ersten Factor, der ganze übrige Theil aber dem zweyten, als Exponent beygegeben wäre. In Zeichen $e^a . e^{(a + \overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots)} = e^a . e^{(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots)}$ Der erste Factor ließe sich alsdann, weil er bloß Nebengrößen enthält, ohne weitere Entwicklung beybehalten, der zweyte aber fiele genau unter das eben betrachtete Schema zurück.

Die allgemeinste Form einer Exponenzialgröße, deren Basis als Nebengröße gedacht werden soll, würde die folgende seyn $b^{(\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta})}$.
Ihre Entwicklung aber könnte leicht auf das Vorhergehende zurückgeführt werden. Man müßte nur zuerst ihre Basis als Potenz des natürlichen Systems darzustellen wissen $b = e^B$. Alsdann würde sie $e^{B(ax + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta})}$, und man würde, um sie ferner zu entwickeln, wieder für den Augenblick ihren Exponenten $B(\overset{0}{a}x^\alpha + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} \ldots) = z$ setzen, mithin sie auf die einfache Gestalt e^z zurückbringen. Die einzelnen Glieder der daraus entstehenden Reihe ließen sich auch, weil jedes von ihnen eine ganze positive Potenz von z enthält, sehr leicht in Reihen auflösen, die nach Potenzen der eigentlichen Haupt-

größe, x, fortgehn würden. Aber diese Formen würklich zu einer einzigen durch Addition zusammenzuziehn, vermögte man im Allgemeinen nicht weiter. Denn die erste Reihe, aus z^1 entsprungen, finge mit x^{α} an, durch $x^{\alpha+\delta}$, $x^{\alpha+2\delta}$ u. s. w. fortlaufend; die zweyte, welche aus z^2 ihren Ursprung nimt, würde mit $x^{2\alpha}$ beginnen, und durch $x^{2\alpha+\delta}$, $x^{2\alpha+2\delta}$ u. s. w fortgehn; und so würde überhaupt jede folgende mit einem nächsthöheren Vielfachen von α anheben, und dasselbe in ihren folgenden Gliedern, mit den successiven Vielfachen von δ vermehrt, bewahren. Also nur bey gewissen bestimmten Verhältnissen zwischen α und δ, oder genauer nur dann, wenn α ein Vielfaches von δ wäre, würde eine Vereinigung dieser Reihen zu einer einzigen von ähnlicher Gestalt, wie die Grundform des angenommenen Exponenten, möglich seyn. Es entzieht sich also eigentlich eine solche, allgemeiner ausgedrückte Exponenzialgröße, den bisher gültigen Gesetzen analytischer Entwicklung.

B. Die allgemeine Aufgabe, eine Exponenzialgröße der Form $e^{\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+..}$ zu entwickeln, hat im Vorhergehenden ihre independente Auflösung vollständig erhalten. Aber die Analysis fordert mit Recht eine **recurrirende** als die zweyte Hauptform jeder Entwicklung. Und wir haben nachzusuchen, **ob sich nicht zwischen den Coeffizienten der Reihe für $e^{\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+..} = \overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2..$ ein Gesetz des gegenseitigen Zusammenhangs entdecken läßt, durch dessen Hülfe jeder folgende von ihnen aus den vorhergehenden berechnet werden kann.**

a. Will man dieses **durch Ableitung der recurrirenden Bestimmung aus der independenten** leisten, so kehrt die ganze Untersuchung fast ungeändert wieder, welche bey der Ableitung einer Recursionsformel für die Coeffizienten der Potenz eines Polynomiums bereits angestellt worden ist. Das independente Gesetz unsrer Coeffizienten gibt

$\overset{r}{A} = {}^{1..r}\Sigma\left(\frac{{}^{r}\mathfrak{p}\overset{h}{C}}{1.2..h}\right)$. Wäre in diesem Ausdruck nicht der Divisor 1..h, so fiele er völlig mit dem für die Coeffizienten eines Quotienten zusammen, welcher sich aus $\frac{1}{1-\overset{1}{a}x-\overset{2}{a}x^2 ...}$ entwickelt, so würde also, wie für diesen, die recurrirende Formel seyn $\overset{r}{A} = \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} .. + \overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{a}\overset{o}{A}$. Jetzt aber erlaubt zwar die Anwesenheit jenes Factors in dem indepehdenten Ausdrucke nicht, diese Formel zu setzen, bringt aber auf die Vermuthung, daß das Hinzufügen eines eignen Factors in jedem Gliede auch diesen Umstand werde beseitigen können, daß also die gesuchte Beziehung durch die Formel
$\overset{r}{A} = \overset{1}{f}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} .. + \overset{k}{f}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} .. + \overset{r}{f}\overset{r}{a}\overset{o}{A}$, werde darstellbar seyn.

Die Prüfung dieser Annahme geschieht hier genau, wie im obigen Falle. Man nehme aus $\overset{r}{A}$ irgend eine Combinationsform, der unbestimmten Classe m gehörig, heraus. Sie wird ihre Permutationszahl N, und dem independenten Gesetze gemäß den Divisor 1.2..m, bey sich führen. Eigentlich sind in ihr alle Variationsformen, aus den Elementen, welche sie in sich enthält, zusammengefaßt. Heben wir alle diejenigen Variationsformen aus diesem Inbegriff wieder hervor, welche unbestimmt das Element $\overset{r}{a}$ an der Spitze führen, von welchem wir annehmen wollen, daß es π mal in der Form vorkommen man (so daß also $\Sigma(\pi) = m$, und $\Sigma(k\pi) = r$ seyn wird), so ist die Anzahl aller dieser Variationsformen $\frac{\pi N}{m}$. Frägt man, wie sie bey der recurrirenden Bildung von $\overset{r}{A}$ in diesen Inbegriff gekommen sind, so ist offenbar, daß sie nur aus $\overset{r-k}{A}$ herrühren können, weil nur dieser Größe beym Recurriren $\overset{r}{a}$ an die Spitze gestellt wird. Sie sind aber, abgesehn von

ihrem Anfangselement $\overset{k}{a}$, sämtlich der Classe m — 1 angehörig, haben also, dem independenten Gesetze zufolge, insofern sämtlich schon in $\overset{r-k}{A}$ den Divisor 1.2..(m-1) geführt, so wie sie bey der Recursion den Factor $\overset{k}{f}$ bekommen haben sollen. Es kommt also jetzt nur darauf an, ob der Ausdruck $\frac{\overset{k}{f}'}{1.2..(m-1)} \cdot \frac{\pi N}{m}$, wenn man in ihm statt π und k alle möglichen zusammengehörigen Werthe setzt, und die daraus entstehenden Zahlen zusammen rechnet, würklich den Factor $\frac{N}{1.2..m}$ hervorbringt, welchen die angenommene Combinationsform, dem bewiesenen independenten Gesetze gemäß, in $\overset{r}{A}$ bey sich führt, oder in Zeichen, ob ein Werth für $\overset{k}{f}$ gefunden werden kann, unabhängig von m, und also für alle Combinationsformen aus $\overset{r}{A}$, sie mögen gehören, zu welcher Classe sie wollen, sich gleich, der in der That $\Sigma\left(\frac{\overset{k}{f} \cdot \pi \cdot N}{1.2..(m-1).m}\right)$ zu geben vermag.

Sondern wir auf beyden Seiten Factoren, die weder k noch π enthalten, und also als unabänderliche gemeinschaftliche angesehn werden können, ab, d. h. lassen wir $\frac{N}{1.2..m}$ auf beyden Seiten weg, so reduzirt sich unsre Formel auf $\Sigma\left(\overset{k}{f} \cdot \pi\right) = 1$.

Und so wird es hier sehr leicht, zu finden, wie $\overset{k}{f}$ genommen werden muß. Es sollte, der Annahme gemäß, $\Sigma(\pi k) = r$ seyn. Man braucht also offenbar nur für $\overset{k}{f}$ den Werth $\frac{k}{r}$ zu setzen, um $\Sigma(\overset{k}{f} . \pi) = \Sigma\frac{(k\pi)}{r}$ in $\frac{r}{r} = 1$ zu verwandeln.

Dieser Werth aber $\overset{k}{f} = \frac{k}{r}$, ist so einfach, als man nur wünschen mag, und erscheint offenbar von m völlig unabhängig. Freylich ist er es nicht von r, so daß also die Factoren, welche man im recurrirenden Aufsteigen von vorhergehenden Coeffizienten zu folgenden den einzelnen Elementen beyzufügen hat, allerdings bey jeder neuen Recursion geändert werden müssen. Indessen bleibt doch die ganze Formel leicht übersehbar. Man multiplizirt jeden der vorhergehenden Coeffizienten mit dem Elemente, welches seinen Index zu der Zahl des verlangten ergänzt, nachdem dies Element selbst mit seinem eignen Index multiplizirt, und durch den des geforderten Coeffizienten dividirt worden ist. In Zeichen: es ist

$$\overset{r}{A} = \frac{1}{r}\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + \frac{2}{r}\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + \frac{k}{r}\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + \frac{r}{r}\overset{r}{a}A.$$

b. Wollte man aber die recurrirende Bestimmung geradezu finden, ohne sie aus der independenten abzuleiten, so würde das bereits mehrmals gebrauchte Verfahren, eine fingirte Form anzunehmen, in ihrem Ansatze der Hauptgröße einen geänderten Werth beyzulegen, den Zusatz, der ihre Aenderung andeutet, als eine neue Hauptgröße zu betrachten, und auf Identität der Ausdrücke, welche aus dem anfänglichen Ansatze entspringen, zu bestehn, sogleich zum Zwecke führen.

Ist $e^{\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}.x^r \ldots} = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$ und setzt man statt x an die Stelle x + z, so kommt,

$$e^{\overset{1}{a}(x+z) + \overset{2}{a}(x+z)^2 \ldots + \overset{r}{a}(x+z)^r \ldots}$$
$$= \overset{0}{A} + \overset{1}{A}(x+z)^1 + \overset{2}{A}(x+z)^2 \ldots + \overset{r}{A}(x+z)^r \ldots$$

Entwickelt sich nach den Regeln des elementaren binomischen Satzes disseits die Form des Exponenten, so daß sie nach Potenzen von z fortschreitet, so geht sie in einen Ausdruck über, dessen Anfangsglied $\mathfrak{A} = \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ dessen

erstes nachfolgendes $\overset{1}{\mathfrak{A}}z = (\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x^1 \ldots r\overset{r}{a}x^{r-1} \ldots)z$ ist, für den sich auf gleiche Art, auch die folgenden $\overset{2}{\mathfrak{A}}z^2, \overset{3}{\mathfrak{A}}z^3 \ldots$ finden ließen, wenn es erforderlich wäre. Man erhielte also disseits $e^{\overset{0}{\mathfrak{A}} + \overset{1}{\mathfrak{A}}z^1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}z^2 + \ldots} = e^{\overset{0}{\mathfrak{A}}}(e^{\overset{1}{\mathfrak{A}}z + \overset{2}{\mathfrak{A}}z^2 \ldots})$ Der zweyte Factor dieses Products $e^{\overset{1}{\mathfrak{A}}z + \overset{2}{\mathfrak{A}}z^2 \ldots}$ würde nach der Grundformel entwickelt $= 1 + (\overset{1}{\mathfrak{A}}z^1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}z^2 \ldots)^1 + \frac{1}{1.2}(\overset{1}{\mathfrak{A}}z^1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}z^2 \ldots)^2 \ldots$ hervorbringen. In diesem ganzen Ausdrucke ist offenbar das niedrigste Glied, das einzige, worin kein z erscheint. Dies also, mit dem Factor, der allen Gliedern gehören soll, $e^{\overset{0}{\mathfrak{A}}}$ multiplizirt, gibt das aus der disseitigen Entwicklung entstehende niedrigste $e^{\overset{0}{\mathfrak{A}}} = e^{(\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)} = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$

Das aus der ferneren Entwicklung entstehende, in z^1 multiplizirte Glied $\overset{1}{\mathfrak{A}}z^1$, mit beygegebenem zugehörigen Factor $e^{\overset{0}{\mathfrak{A}}}.\overset{1}{\mathfrak{A}}z$. oder für $\overset{0}{\mathfrak{A}}$ und $\overset{1}{\mathfrak{A}}$ ihre Werthe zurückgesetzt:

$$e^{(\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots)}.(\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x^1 \ldots + r\overset{r}{a}x^{r-1} \ldots)z^1 =$$

$$(\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \ldots \overset{r}{A}x^r \ldots), (\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x^1 \ldots + r\overset{r}{a}x^{r-1} \ldots)z^1$$

Entwickelt man jenseits auf gleiche Art den Ausdruck:

$$\overset{0}{A} + \overset{1}{A}(x+z)^1 + \overset{2}{A}(x+z)^2 \ldots + \overset{r}{A}(x+z)^r \ldots$$

so wird dessen Anfangsglied:

$$\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$$

von selbst identisch mit dem disseitigen Anfangsgliede. Das erste nachfolgende, in z^1 multiplizirte Glied wird jenseits:

$$(\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x^1 \ldots + r\overset{r}{A}x^{r-1} + \ldots)z^1$$

Damit es dem gleichartigen der disseitigen Entwicklung identisch sey, muß also:

$$(\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x^{1}+\overset{2}{A}x^{2}\dots+\overset{r-1}{A}x^{r-1}+\overset{r}{A}x^{r}\dots)(\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}x^{1}\dots$$
$$+r\overset{r}{a}x^{r-1}\dots)=(\overset{1}{A}+2\overset{2}{A}x^{1}\dots+r\overset{r}{A}x^{r-1}\dots)$$ seyn.

Die Identität zweyer nach x fortschreitenden Formen verlangt allgemein die Identität ihrer beyderseitigen $(r-1)$ten Glieder.

Das $(r-1)$te Glied des disseits geforderten Productes ist

$$(\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}\dots+k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A}\dots r\overset{r}{a}.\overset{0}{A})x^{r-1}$$

das $(r-1)$te Glied seines jenseitigen Werths $r\overset{r}{A}x^{r-1}$. Man hat also, ihre Coeffizienten identifizirt, und auf beyden Seiten durch r dividirt:

$$\overset{r}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}\dots+k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A}\dots+r\overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r}$$

welches die vorige Regel ist.

Es gibt noch höhere Exponenzialgrößen als die bisher betrachteten, und zwar von mancherley Arten. Bleibt die Basis eine Nebengröße, so daß nur der Exponent selbst wieder als eine Exponenzialgröße angenommen wird, so fallen sie unter die Regeln der vorigen Entwicklung zurück. Soll aber die Basis selbst eine nach Potenzen der nemlichen Hauptgröße fortschreitende Form wie der Exponent seyn, so muß man erst Kenntnisse von der Entwicklung logarithmischer Ausdrücke haben, ehe man die ihrige zu unternehmen vermag. Dazu führen die nächstfolgenden Betrachtungen.

Zehntes Kapitel.

Entwicklung der Logarithmen oder Exponenziirung.

So wie die directe Aufgabe der Potenziirung in zwey verschiedenen Gestalten aufgestellt werden kann, jenachdem man die Hauptgröße in den Grundfactor, oder in den Exponenten der Potenz übertragen hat, so kann auch die umgekehrte Aufgabe, welche durch sie von selbst herbeygeführt wird, in zwey verschiedenen Formen erscheinen. Die eine von diesen ist die Wurzelauszziehung; von ihr gibt der binomische Lehrsatz die Auflösung. Die andre hingegen, die **Exponenziirung**, wobey der berechnete Werth einer Potenz, und der Basis woraus sie sich gebildet haben mag, als bekannt angenommen werden, der Exponent aber, welcher dieser Basis als solcher beygelegt werden muß, damit die Potenz den vorgeschriebenen Werth erhalte, gefunden werden soll, muß einer genaueren Betrachtung erst unterworfen werden *).

Die Benennung Exponent und Logarithme sind gleichbedeutend; ebenso die Ausdrücke Grundfactor oder Wurzel und Basis; es ist einerley, ob man sagt: für eine gewisse Zahl a als Grundfactor, eine zweyte c als Exponent, sey eine dritte b berechneter Werth der Potenz, oder: für eine gewisse Zahl a als Basis, und eine zweyte c als Logarithmen, sey eine dritte b die jenem Logarithmen angehörige Zahl, und so versteht

---

*) Es wäre der Natur der Sache angemessen, für diese Operation ein eignes Zeichen einzuführen, wie man auch würklich z. B. das Zeichen $\overset{b}{\underset{a}{=}}$ vorgeschlagen hat, welches andeuten soll, daß die Zahl b als Potenz der Basis a betrachtet, und der ihr zugehörige Exponent gefunden werden muß, so daß also, wenn $\overset{b}{\underset{a}{=}} = c$ gesetzt würde, diese Gleichung als Umkehrung von $a^c = b$ anzusehn wäre.

man die Aufgabe der Exponenziirung unter dem Ausdrucke: für eine gegebene Basis, zu einer gewissen Zahl den zugehörigen Logarithmen finden. In Zeichen. wenn $a^c = b$, so ist $c = \log \text{num } b$ bas a. Diese Bezeichnung pflegt in zwey Fällen eine Abkürzung zu bekommen. Es gibt zwey Potenzensysteme, von denen die Basis unabänderlich bestimmt, und ein für allemal bekannt ist: das natürliche Potenzensystem, und dasjenige, von welchem 10 die Basis ist. Nun hat man die Logarithmen im ersten selbst natürliche oder hyperbolische, im zweyten künstliche oder gemeine, zuweilen auch wohl briggische genannt. Wenn man also in dem natürlichen Potenzensystem frägt, was für eine Potenz eine beliebige Zahl sey, so drückt man dies aus: es soll ihr natürlicher Logarithme gefunden werden; im decadischen Potenzensystem: ihr gemeiner oder künstlicher Logarithme. Wenn also z. E. $e^a = b$ wäre, und man a als unbekannt ansähe, so würde es heißen: $a = \log \text{nat. } b$, oder auch wohl: $a = \log b$ schlechthin; wenn $10^a = b$ wäre, $a = \log \text{vulg. } b$. In allen übrigen Fällen aber muß die anfängliche Art der Bezeichnung beybehalten werden. Zum Glück sind es in würklichen Rechnungen fast nur die natürlichen, und etwa zuweilen die gemeinen Logarithmen, womit man zu thun bekommt.

Es ist aus der Elementar-Arithmetik bekannt, daß die allgemeine Frage, was für eine Potenz von irgend einer gegebenen Zahl eine andre sey, wenn sie nur für ein einziges Potenzensystem aufgelöst werden kann, eben dadurch für jedes andre sehr leicht zu beantworten ist. Wir wollen sie deswegen zuerst für das natürliche Potenzensystem in Erwägung nehmen.

I. Fundamental-Aufgabe der Exponenziirung. Natürliche Logarithmen möglichst einfacher Formen des ersten Grades.

Der einfachste Ausdruck, welchen man dem berechneten Werthe einer Potenz aus dem natürlichen System geben kann,

wenn man ihn als eine zusammengesetzte, und die Hauptgröße künftiger Entwicklung enthaltende Größe ansehn will, ist $1 + x$. Wir fragen also zunächst, ob es möglich ist, eine nach Potenzen von x fortschreitende Form zu finden, so daß, wenn man sie zum Exponenten einer Potenz von e macht, der berechnete Werth dieser Potenz genau $1 + x$ beträgt, mithin die gefundene Form den Namen des natürlichen Logarithmen der beliebig gewählten Zahl $1 + x$ zu führen berechtigt ist.

Diese Aufgabe ist das Umgekehrte der Potenzirung. Ihrer Auflösung kann also, wie allenthalben, wo von umgekehrten Operationen die Rede ist, ursprünglich nur dadurch gefunden werden, daß man die recurrirenden Beziehungen, welche bey der directen Aufgabe, wovon sie die umgekehrte ist, zwischen den dort gegebenen und gesuchten Größen bereits nachgewiesen sind, wieder aufnimt, und nur dabey Gegebenes und Gesuchtes verwechselt.

Nun aber ist bey den Entwicklungen der Exponenzialgrößen gezeigt, daß die Exponenzialgröße $e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{r}{a}x^r \ldots}$ durch eine Reihe von der Form $\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r + \ldots$ dargestellt werden könne, so daß $A = 1$ und $\overset{1}{A} = \overset{1}{a}$, und, wenn nach dem recurrirenden Zusammenhange der folgenden Coeffizienten gefragt wird,

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + (r-1)\overset{r-1}{a} \cdot \overset{1}{A} + r \cdot \overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r}$$

Wir beabsichtigen jetzt, wenn wir die Form $\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ als eine vorläufig fingirte betrachten,

$$e^{\overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots} = 1 + x$$

zu setzen, und zu untersuchen, wie die Coeffizienten

$\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{r}{a} \ldots$, eingerichtet werden müssen, damit dieser Forderung Genüge geschehe.

Will man also die allgemeine Formel:

$$e^{\overset{1}{a}x^1 + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots} = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x^1 + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots$$

dadurch specialisiren, daß man nicht allein $\overset{0}{A} = 1$ setzt, welches immer von selbst der Fall seyn wird, sondern auch $\overset{1}{A} = \overset{1}{a} = 1$ annimmt, alle folgenden A aber $= 0$ seyn läßt, so reduzirt sich der allgemeine Ausdruck der Recursion:

$$\overset{r}{A} = \frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} \ldots + k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots + (r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + r\overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r}$$

auf die nur aus 2 Gliedern bestehende Gleichung $0 = \frac{(r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A} + r\overset{r}{a}\overset{0}{A}}{r}$. Setzen wir in ihr für $\overset{1}{A}$ und $\overset{0}{A}$ die schon bekannten Werthe $\overset{1}{A} = 1 = \overset{0}{A}$, so gibt sie $(r-1)\overset{r-1}{a} + r\overset{r}{a} = 0$, oder bequemer $\overset{r}{a} = -\frac{(r-1)}{r}\overset{r-1}{a}$. Und so stellt sich eine äußerst einfache Recursionsregel dar, die nur in Absicht auf die Coeffizienten des fingirten Exponenten angenommen werden darf, damit der berechnete Werth seiner Potenz in natürlichen System würklich $1 + x$ werde.

Wir wissen schon, daß $\overset{1}{a} = 1$ seyn muß. Die folgenden Coeffizienten finden sich aus unsrer Recursionsregel. Ihr gemäß wird $\overset{2}{a} = -\frac{1}{2}\overset{1}{a} = -\frac{1}{2}$; $\overset{3}{a} = -\frac{2}{3}\overset{2}{a} = +\frac{1}{3}$ u. s. w. Das independente Gesetz ist auf diesem Wege leicht zu ergreifen. Es werde angenommen, daß $\overset{r}{a} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r}$. Alsdann wird $\overset{r+1}{a} = -(-1)^{r-1} \cdot \frac{r\overset{r}{a}}{r+1} = (-1)^r \cdot \frac{1}{r+1}$, welches die unbedingte Gültigkeit dieses für die ersten Coeffizienten würklich statt findenden Gesetzes außer Zweifel setzt.

Wollen wir also independente Bestimmung, so ist:

$$\log \text{nat} (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots (-1)^{r-1} \frac{x^r}{r} \ldots$$

Wird hingegen recurrirende beabsichtigt und dem zufolge:

$$\log \text{nat} (a+x) = \overset{1}{a} x^1 + \overset{2}{a} x^2 \ldots + \overset{r-1}{a} x^{r-1} + \overset{r}{a} x^r \ldots$$

gesetzt, so ist $\overset{1}{a} = 1$, und $\overset{r}{a} = -\frac{(r-1)}{r} \overset{r-1}{a}$.

Als ein besonders merkwürdiger Umstand verdient angeführt zu werden, daß die Reihe, wodurch sich aus der Basis eines Potenzensystems, $1+a$, der Modulus ebendesselben berechnet,

$$\text{Modul. bas.} (1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$$

genau dieselbe ist, wodurch sich vermöge der eben gefundenen Formel für die Zahl $1+\overset{1}{a}$ im natürlichen Potenzensystem der Exponent entwickeln würde. Wir dürfen also inskünftige statt Modul. bas. $(1+a)$ den geschlossenen arithmetischen Ausdruck, log nat $(1+a)$ setzen, so daß folglich jetzt die allgemeine Reihe

$$(1+a)^x = 1 + \overset{1}{A} x + \frac{\overset{2}{A} x^2}{1.2} \ldots + \overset{n}{A} x^n \ldots$$

wobey $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots$ war,

durch $(1+a)^x = 1 + [\log(1+a)] . x + \frac{[\log(1+a)]^2 . x^2}{1.2} + \frac{[\log(1+a)]^n x^n}{1.2..n} + \ldots$

dargestellt werden kann. Und so zeigt sich ein neuer Grund, das natürliche Potenzen- oder Logarithmen-System als das wichtigste unter allen anzusehn. Selbst alsdann, wenn man irgend ein andres ursprünglich berechnen wollte, mischt es sich ein, und die Coeffizienten der zur Berechnung nothwendigen Reihe sind eigentlich aus ihm hergenommen.

II. Allgemeine Aufgabe der Exponenziirung im natürlichen Potenzensystem. Logarithme einer beliebigen Grundform in demselben.

Der bisher betrachtete Fall der Exponenziirung im natürlichen System war eigentlich nur der einfachste. Mag jetzt eine unbestimmt nach Potenzen von x fortschreitende Form genommen seyn, so daß zunächst gefragt wird, ob sie nicht eine Potenz von e ist, und ob nicht ein ihr zugehöriger Exponent als eine ähnlich gebildete, von ihr abhängige Form, ausfindig gemacht werden kann.

a. Soll dies **auf recurrirendem Wege** eingeleitet werden, so darf man sagen: diese Untersuchung führe sich im Allgemeinen beynahe leichter wie im einfachen Falle. Es sey $1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2..+\overset{r}{A}x^r..$ die gegebene Form; der ihr zugehörige vorläufig angenommene Exponent $\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2..+\overset{r}{a}x^r..$ Es soll also $e^{\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{r}{a}x^r..}=1+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2..+\overset{r}{A}x^r..$ seyn. Nun aber haben wir, bey der Entwicklung der Exponenzialgrößen gesehn, daß $\overset{1}{a}=\overset{1}{A}$ ist, und daß allgemein

$$\overset{r}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}+2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A}\ldots+k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A}..+(r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}+r\overset{r}{a}.}{r}$$

Wir brauchten vorhin diese Recursionsformel, um aus den Größen $\overset{1}{a},\overset{2}{a},..\overset{r}{a}$, die wir als bekannt annahmen, die Größen $\overset{1}{A},\overset{2}{A},..\overset{r}{A}$, vermöge ihres gegenseitigen Zusammenhangs zu bestimmen. Sie läßt sich, nach einer leichten Veränderung, eben so gut im umgekehrten Sinne gebrauchen, und gibt alsdann

$$\overset{r}{a}=\frac{-(r-1).\overset{1}{A}.\overset{r-1}{a}-(r-2).\overset{2}{A}.\overset{r-2}{a}..-k\overset{r-k}{A}.\overset{k}{a}..-2\overset{r-2}{A}\overset{2}{a}-\overset{r-1}{A}\overset{1}{a}+r\overset{r}{A}}{r}$$

die gesuchte Regel, ver-

möge deren also, für $\log (1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots)$, wenn man dessen entwickelten Werth $= 1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$ setzt, jeder folgende Coeffizient dieser gesuchten Reihe (der erste $\overset{1}{a}$ ist $= \overset{1}{A}$) aus den vor ihm vorhergehenden gefunden werden kann.

b. Was den independenten Ausdruck betrifft, so ließe sich ein solcher sofort aus dieser Recursionsformel ableiten. Man gelangt aber bequemer dazu, wenn man den gegenwärtigen zusammengesetzten Fall auf den ersten, einfacheren zurückbringt. Um $\log (1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r \ldots)$ zu erhalten, setze man momentan

$$z = (\overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{r}{A}x^r \ldots).$$

Alsdann ist nur $\log (1 + z)$ vorhanden, wovon der Werth durch die bekannte Reihe

$$\log (1 + z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 \ldots (-1)^{r-1} \cdot \tfrac{1}{r} z^r \ldots$$

dargestellt wird. Man setze in dieser für z seinen eigentlichen Werth zurück, entwickle jedes Glied nach Potenzen von x, und ziehe die daraus entspringenden Reihen in eine Summe zusammen. Diese Arbeit ist sehr leicht, und es sind ähnliche im Vorhergehenden schon oft genug vorgekommen, um uns zu berechtigen, hier das Resultat als auf den ersten Blick klar sogleich anzugeben. Die neue Reihe muß mit 1 anheben; in ihren successiven Gliedern die successiven Potenzen von x enthalten, so daß allgemein das $n$te

$$= {}^{1 \ldots n}\overset{h}{\Sigma}\left((-1)^{h-1} \frac{1}{h}\, {}^{n}p\overset{h}{C}\right) x^n$$ ist, angenommen, daß die Coeffizienten der gegebenen Form, $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots \overset{r}{A}, \ldots$ als combinatorische Elemente betrachtet werden.

Wir haben für das Anfangsglied der zu exponenzirenden Form die Einheit genommen. Diese Voraussetzung scheint

sehr partiell, aber man kommt bey jeder allgemeineren auf sie wieder zurück. Sollte $\log (A x^{\alpha} + B x^{\alpha+\delta} + C x^{\alpha+2\delta} ..)$ gefunden werden, so müßte zuerst die gegebene Form als Product von zwey Factoren, $A x^{\alpha}\left(1 + \frac{B}{A} x^{\delta} + \frac{C}{A} x^{2\delta} ..\right)$ dargestellt werden; ihr Logarithme würde alsdann $\log (A x^{\alpha}) + \log\left(1 + \frac{B}{A} x^{\delta} + \frac{C}{A} x^{2\delta} ..\right)$ in welchem Ausdrucke nur der zweyte Theil einer Entwicklung fähig ist.

Bisher ist nur von der Exponenzirung einer angenommenen Form im natürlichen Potenzensystem die Rede gewesen. Der Uebergang von da zu jedem andern beliebigen Systeme ist leicht. Bekannten Lehren der Elementar-Arithmetik gemäß, ist $\log (1 + x)$ bas. $a = \left(\frac{\log \text{nat } [1 + x]}{\log \text{ nat } a}\right)$, so daß also, wenn irgend eine Form als Potenz einer beliebigen bestimmten Basis a, betrachtet werden sollte, die Reihe ungeändert beybehalten werden könnte, wodurch ihr Logarithme im natürlichen System ausgedrückt wird, und nur der Divisor log a ihr beygegeben werden müßte. In Zeichen

$$\log (1 + x) \text{ bas. } a = \frac{1}{\log \text{nat } a} (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 ..)$$

Man pflegt den Factor $\frac{1}{\log \text{nat } a}$, womit der natürlichen Logarithme einer Zahl zu multipliziren ist, um den Logarithmen eben derselben für die Basis a zu erhalten, auch wohl den Modulus des Logarithmensystems von der Basis a zu nennen.

Jetzt würden wir auch im Stande seyn, die höheren Exponenzialgrößen zu betrachten, bey denen Basis und Exponent beyde Formen seyn sollten, welche nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortgehn, $(1 + ax + bx^2 ..)^{(1 + \alpha x + \beta x^2 ..)}$. Nennt man Anfangs die Basis eines solchen Ausdrucks

$(1 + B)$, und den Exponenten A, so reduzirt er sich $(1 + B)^A$, gibt also die Reihe

$$1 + A . \log(1 + B) + \frac{A^2}{1.2} [\log(1 + B)]^2 . .$$

$\frac{A}{r..1} [\log(1 + B)]^r$ .. Nun ist A eine nach Potenzen von x fortschreitende Form; eben so kann $\log(1 + B) = \log(1 + ax + bx^2 ..)$ in eine solche aufgelöst werden. Und so erhellet die Möglichkeit, jedes einzelne Glied der Reihe für $(1 + B)^A$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Form umzusetzen, mithin die Summe von ihnen allen auf die gleiche Gestalt zurückzubringen. Es würde hier zu weit führen, die vollständige Auflösung dieser verwickelten, obschon an sich leichten Rechnung beyzubringen, um so weniger, da selten ein Fall vorkommen mögte, wo man Gebrauch von ihr zu machen hätte.

Eilftes Kapitel.

Numerische Berechnung der Exponenzialgrößen und Logarithmen im natürlichen System.

Die abstracte allgemeine Arithmetik bildet Ausdrücke, in denen successive Potenzen einer Hauptgröße und Coeffizienten, die denselben als Factoren beygegeben werden, nach einer einfachen Regel zusammentreten. Aber sie abstrahirt bey ihren ersten und wichtigsten Untersuchungen gänzlich von der würklichen Quantität, die jener Hauptgröße und diesen Coeffizienten beygelegt werden könnte, den individuellen Zahlenwerthen, welche dadurch die Ausdrücke, an denen sie operirt, oder diejenigen, welche daraus entstehen, erhalten mögten. Sie entwickelt aus unbestimmt angenommenen Formen einer gewissen Gestalt, andere, ihnen ähnlich gebildete, und nur die Gesetze dieser Entwicklungen sind es, worauf sie in ihren Fundamentalbetrachtungen zu achten hat, und muß dieses lediglich

aus den Begriffen der zu vollziehenden Operationen, ohne irgend eine Individualisirung der Formen, woran dieselben ausgeübt werden sollen, leisten, wenn sie den Standpunct wahrer wissenschaftlicher Allgemeinheit nicht aufgeben will.

Sofern aber weiterhin von würklichem Gebrauch und bestimmter Anwendung die Rede seyn soll, wird mit den allgemeinen Entwicklungsgesetzen noch eine vermittelnde Betrachtung verbunden werden müssen.

Daß sich in den Formen, an denen operirt worden ist, sowohl für die Hauptgröße, als die Coeffizienten bestimmte Zahlen substituiren lassen, versteht sich von selbst. Daß in der neuen Form, die als Entwicklung des Gegebenen hervorgetreten seyn mag, das Nemliche geschehen könne, ist gleichfalls klar. Ob und wie weit aber auf diesem Wege aus den numerischen Werthen der gesetzmäßigen Formen, mit denen man rechnet, die numerischen Werthe des zu Berechnenden selbst abgeleitet werden können, ist eine Frage, die der Untersuchung bedarf, sobald man in den Fall geräth, solchen Gebrauch der allgemeinen Formel als zulässig wünschen, und zur Vollführung einer erforderlichen Rechnung nothwendig erachten zu müssen.

Die allgemeine Arithmetik kann eines würklich berechneten Potenzensystems nicht entbehren. Wir sind also zu der Untersuchung gezwungen: ob und wiefern die entwickelten Ausdrücke für Exponentialgrößen und Logarithmen, welche die Theorie darbietet, zu numerischer Berechnung in einzelnen Fällen gebraucht werden können.

I. Ueber approximativen Gebrauch entwickelter Formen.

1. Wenn jede Entwicklung eine Form hervorriefe, die aus einer bestimmten und geschlossenen Zahl von Gliedern in gesetzmäßiger Gestalt zusammengesetzt würde, so wäre allerdings die Anwendbarkeit zu würklicher Berechnung entschieden, und

man erhielte, alle Glieder, woraus sie besteht, durch Addition verbindend, das verlangte Resultat.

Aber in den wenigsten Fällen tritt aus arithmetischen Operationen an gegebenen Formen ein geschlossener, auf eine feste Zahl von Gliedern reduzirter Ausdruck hervor; es existirt im Gegentheil meistens die Möglichkeit, die Glieder desselben ins Unendliche fortlaufen zu lassen, zugleich aber auch die Beschränkung, daß niemals, sobald man bey irgend einem Gliede die Entwicklung abbricht, die Summe aller Glieder, soweit man sie hat, den Werth des Gesuchten genau und vollendet darbieten kann.

Dieser Unmöglichkeit Entwicklungen zu schließen, correspondirt in den meisten Fällen die objective Unmöglichkeit dasjenige, was sie verlangen, überhaupt in bestimmter Zahl darstellen zu können, wie sie sich schon bey den Wurzelausziehungen in den Irrationalitäten darbietet. Es ist z. E. unmöglich, daß der binomische Lehrsatz $\sqrt{(1+x)}$ durch eine vollendete Reihe von Gliedern darstellen kann, denn in der Regel gibt es keine Zahl, die mit sich selbst multiplizirt $1+x$ hervorbringen könnte, wie im einfachsten Falle für $x=1$ keine Zahl möglich ist, deren Quadrat $= 2$ seyn würde.

Wir müssen uns jedesmal in solchen Fällen begnügen, Zahlen anzugeben, welche zwar das nicht leisten, was wirklich verlangt war, aber doch, wenn sie an die Bedingungen gehalten werden, denen die eigentlich geforderte genügen sollte, ein Resultat geben, das nur wenig abweicht von demjenigen, welches eigentlich hätte erreicht werden sollen. Gibt eine solche von uns gefundene Zahl ein Resultat, geringer als es die eigentlich verlangte, wenn sie möglich gewesen wäre, gebracht haben würde, so nennen wir sie zu klein, im umgekehrten Falle zu groß: die Möglichkeit zwey Zahlen, von denen die eine immer zu wenig, die andere immer zu viel bringt, die sich aber selbst so nahe rücken können, als man will, zu finden,

so daß man behaupten dürfte: das Gesuchte, wenn es sich realisiren ließe, würde jederzeit zwischen beiden liegen müssen, ist dasjenige, wonach wir jedesmal zu streben haben, bey allen arithmetischen Operationen, deren Resultat als bestimmte und vollendete Zahl überall nicht erhalten werden kann. Der Unterschied zwischen zwey solchen Zahlen pflegt alsdann die bey der Rechnung erreichte Approximationsgrenze genannt zu werden.

Selbst da wo strenge Genauigkeit möglich ist, kann eine Zahl als Ausdruck einer Größe unrichtig seyn. Sobald aber dasjenige, was ihr an völliger Richtigkeit fehlt, unter eine gewisse Grenze der Kleinheit herabsinkt, können wir berechtigt oder gezwungen seyn, festzusetzen, daß wir, strenger Genauigkeit entsagend, nur eine approximative Bestimmung für das Gesuchte verlangen, jedoch unter der Bedingung, daß eine Grenze der Kleinheit, unter welcher die vorfallende Abweichung von völliger Richtigkeit liegen müßte, falls dieselbe möglich wäre, nach Belieben erwählt und die Ueberzeugung gewonnen werden dürfe, diese vorhandene Abweichung sey in jedem einzelnen Fall geringer, als der Betrag jener angenommenen Grenze.

Man wird diesem gemäß die Frage aufwerfen dürfen: ob es nicht möglich sey, durch die Zusammenfassung einer bestimmten Zahl früherer Glieder in einer Form, deren Entwicklung, ihrem Gesetze gemäß, nie in einer geschlossenen Zahl solcher Glieder vollendet werden kann, eine approximative Bestimmung des jedesmaligen Resultats zu erreichen, welches durch die Form entwickelt werden sollte.

Der erste Gegenstand der auf diese Frage zu richtenden Untersuchung sind solche Formen, deren Glieder sämmtlich das + Zeichen führen, und es genügt für den Anfang, so wie für den nächsten Zweck, keine andere Potenzen der Hauptgröße, als die, deren Exponenten weder Brüche noch negative Zahlen sind, in ihnen vorauszusetzen.

2. Die Formen, welche, mit ihren Gliedern ins Unendliche fortlaufend, in der verlangten Art zu keiner approximativen Bestimmung brauchbar auf den ersten Blick erkannt und ausgeschlossen werden können, sind unverkennbar diejenigen, in denen die folgenden Glieder fortlaufend immer größer werden, diejenigen, worin sie einander gleich bleiben und diejenigen, deren successive Glieder, wenn sie auch allmälig immer mehr abnehmen, jederzeit über einer bestimmten Kleinheitsgrenze bleiben. Bey allen solchen Formen wächst die Summe der entwickelten Glieder mit ihrer Zahl ins Unendliche, und das, was ihr aus dem Weggelassenen ferner zugelegt werden könnte, gleichfalls. Sie heißen **divergirende** Formen und taugen nicht zu nähernder Berechnung.

Nur diejenigen, deren nachfolgende Glieder, wenn auch nicht Anfangs, jenseits eines gewissen Index durchaus abnehmend erscheinen, und ihrem Gesetze gemäß unter jede Kleinheitsgrenze immer tiefer herabkommen, je größer ihr Index wird, zeigen auf den ersten Blick keine Unmöglichkeit, zu nähernden Berechnungen gebraucht werden zu können. Indessen werden sie zu solchem Zwecke nur dann als brauchbar anerkannt werden dürfen, wenn entweder aus genauerer Betrachtung ihrer Quelle auch der Betrag dessen, was man wegläßt, indem man bey einer bestimmten Zahl von Gliedern stehn bleibt, genau ausgemittelt werden kann, und in der That dieser Approximationsfehler mit steigender Zahl der Glieder, so klein werden kann, als man will, oder wenn sich von dem Fehlenden soviel darthun läßt, daß es mit fortwachsender Anzahl der Glieder unter jede beliebig gewählte Approximationsgrenze herabkommen müsse. In solchen Fällen nennen wir die Formen **convergirende**.

3. Die Möglichkeit, Formen, die aus würklichen Entwicklungen entstehn, als convergirende anzuerkennen, ohne jedesmal auf die Größen selbst, aus denen sie sich entwickeln, zurückzugehn, und zu untersuchen, wie diese modifizirt werden müß-

ten, damit jene als richtig und brauchbar betrachtet werden könnten, ruht darauf, daß wir deren unzählig viele anzugeben im Stande sind, bey denen, wenn unsre Willkühr die ins Unendliche fortzulaufen fähige Reihe ihrer Glieder irgendwo schließt, aus den Aenderungen, welche mit den Größen, woraus die Entwicklung entsteht, gemacht werden müßten, damit das abgebrochene Resultat vollkommen genau wäre, der Betrag dessen, was ihr ohne jene Aenderungen an strenger Richtigkeit fehlen würde, oder die sogenannte Ergänzung der sistirten Entwicklung, in solcher Gestalt angegeben werden kann, daß sich sogleich beurtheilen läßt, ob und wann für eine immerfort steigende Zahl der zusammengefaßten entwickelten Glieder diese Ergänzung in der That unter jede beliebige Kleinheitsgrenze sinken werde. Solche Formen, sobald sie als convergirende anerkannt worden sind, geben alsdann gewissermaßen für unzählige andere Maßstäbe der Vergleichung ab, sofern über deren Convergenz, auch ohne anderweitige Kenntniß dessen, woraus, und der Art, wie sie sich entwickelt haben, geurtheilt werden soll.

Alle aus der Division an und mit geschlossenen Grundformen entspringende sind von dieser Beschaffenheit. Es genügt hier nur die einfachste von ihnen hervorzuheben. Es ist die Form $1+x+x^2+x^3\ldots+x^n\ldots$, das einfachste Schema der sogenannten geometrischen Progression. Ist x in ihr ein unechter Bruch, so wird jedes folgende Glied der Form größer als das vorhergehende und steigert sich mit zunehmendem Inder über alle Grenze. Denn sey $x=1+a$, so ist $x^n=(1+a)^n$, unfehlbar größer als $1+na$; und schon dieses kann mit zunehmendem n so groß gemacht werden als man will. Die Form $1+x+x^2\ldots+x^n\ldots$ ist also, sobald x ein unechter Bruch seyn soll, durchaus divergirend, und bleibt dieses auch für $x=1$.

Kann aber eine Potenz, deren Wurzel ein unechter Bruch ist, mit zunehmenden Exponenten über alle Grenze wachsen,

so ist eben deswegen jede, deren Wurzel ein echter Bruch seyn soll, fähig unter jede Kleinheitsgrenze herabzusinken. Insofern also darf die fernere Frage aufgeworfen werden, ob nicht $1 + x + x^2 \ldots + x^n \ldots$ eine convergirende Form seyn dürfte, jedesmal wenn x ein echter Bruch ist.

Die Entscheidung fließt sogleich aus der Lehre von der Division. Hat man den Quotienten aus $\frac{1}{1-x}$ bis zum $n$ten Gliede entwickelt, so ist dieses Resultat nur denn streng richtig, wenn man im Dividendus noch das Glied $-x^{n+1}$ zulegen darf, woraus folgt, daß jenem Resultat, damit es den würklich verlangten Quotienten ausdrücke, als Ergänzung jedesmal der zuletzt bleibende Rest mit untergelegtem Divisor beygefügt werden muß:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Hier drückt also bestimmt jene Ergänzung $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ den Approximationsfehler aus, den man begeht, wenn man die n ersten Glieder der Form zusammen rechnet, in der Absicht, dadurch die Größe zu erhalten, aus deren Entwicklung die Form hervortritt. Aber sobald x ein ächter Bruch ist, in welchem Falle $\frac{1}{1-x}$ ein bestimmter unechter Bruch seyn wird, kann x^{n+1}, sofern man n so groß nehmen darf, als man will, zu jeder beliebigen Kleinheit gelangen. Dies folgt von selbst aus dem eben bewiesenen Satze, daß Potenzen eines unechten Bruchs durch Steigerung ihres Exponenten jede bestimmte Größe überschreiten können. Ist aber der eine Factor eines Products $\frac{1}{1-x}$ unabänderlich, während der andere x^{n+1} mit zunehmendem n unter jede Kleinheit sinken kann, so wird auch das Product beyder geringer werden können, als jede angenommene Kleinheitsgrenze.

Die Reihe $1 + x + x^2 .. + x^n ...$ convergirt also jedesmal, wenn x ein echter Bruch ist, und der Approximationsfehler, den man begeht, wenn sie bey ihrem $n$ten Gliede geschlossen wird, ist $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Er ist dem Zeichen nach mit ihrer Summe gleichartig, indem er mit steigendem n immerfort abnimt; während für den Fall, wo x ein unechter Bruch, die Form also divergirend ist, der Approximationsfehler mit n selbst über jede Grenze hinauswachsen kann, und jederzeit negativ gegen die Summe ist, welcher er angehört.

4. Wir bedürfen für den gegenwärtigen Zweck nur des einfachsten unter den Prinzipien, vermöge deren in vielen Fällen eine Form, welche gradezu als gegeben angenommen wird, ohne weiter nach ihrer Entstehung zu forschen, als convergirend anerkannt werden darf.

Sey eine nach Potenzen von x fortschreitende Form als convergirend bekannt, auch ihr Approximationsfehler oder die Grenze bereits ausgemittelt, unter welcher derselbe bleiben muß. Werde nun eine andere durch die nemlichen Potenzen der gemeinschaftlichen Hauptgröße fortschreitende gegeben und sey jedes Glied in dieser geringer als das gleichhohe in jener ersten, so wird unter gleichen Umständen sowohl die Summe als auch der Approximationsfehler, welcher aus dem Abbrechen entspringt, kleiner bey der letzten, als der ersten seyn, unfehlbar also auch die Approximationsgrenze der ersten, als solche für die letzte gebraucht werden können. Ist es möglich, bey der ersten ihren Approximationsfehler genau anzugeben, so kann dieser als Approximationsgrenze für die letzte dienen, so wie es der Totalbetrag der ersten unfehlbar für den der letzten seyn wird.

Es genüge für den gegenwärtigen Zweck folgende Anwendung dieses Prinzips.

a. Gesetzt eine Form, in der allgemein jedes Glied durch G angedeutet werden mag, sey so beschaffen, daß $\overset{n}{G}$ in der That mit steigendem n unter jede bestimmte Kleinheitsgrenze herabkommen kann, und es zeige sich, daß für ein fortan zunehmendes n, der Factor, womit man das vorhergehende Glied zu multipliciren haben würde, um das Folgende zu erhalten, immer kleiner bleiben müsse, als ein bestimmter Bruch $= f$, so ist klar, daß die Fortsetzung der Form $\overset{n+1}{G} + \overset{n+2}{G} + \ldots$ durch lauter kleinere nachfolgende Glieder läuft, als die geometrische Progression $\overset{n+1}{G}(1 + f + f^2 \ldots)$. Es wird also die Summe jener Progression $\overset{n+1}{G}\left(\frac{1}{1-f}\right)$ zugleich Approximationsgrenze der Form $G + \overset{1}{G} \ldots + \overset{n}{G}$ seyn, vorausgesetzt, daß man aus dieser die n ersten Glieder zusammen nimt.

b. Jede nach Potenzen von x fortschreitende Form, in der die Coeffizienten echte Brüche sind, ist unfehlbar convergent, sobald für x selbst als Zahlwerthe echte Brüche angenommen werden, und als Approximationsgrenze, falls man sie mit einem bestimmten Gliede schließt, kann die Summe der geometrischen Progression dienen, welche ihre folgenden Glieder, wenn man dieselben ihrer Coeffizienten berauben wollte, darbieten würde.

c. Wenn die Zeichen der Glieder in einer entwickelten Form abwechseln, übrigens aber einem solchen Gesetze unterworfen sind, daß die Form convergiren und eine angebliche Approximationsgrenze haben würde, falls alle ihre Glieder positiv wären, so convergirt sie unfehlbar, so wie sie ursprünglich gegeben war, (weil sie als Differenz zweyer andern, als convergirend anerkannten betrachtet werden kann) und ihre Approximationsgrenze wird auf jeden Fall noch kleiner seyn, als bey derjenigen, welche alle ihre Glieder ohne abwechselnde Zeichen in sich enthielte.

In vielen Fällen wird es aber zweckmäßig seyn, in solchen Formen fortlaufend zwey nächstbenachbarte Glieder zusammen zu fassen, so daß deren Summe als ein Einzelnes erscheint, und dadurch eine neue Form mit lauter Gliedern, die gleiche Zeichen führen, zu erhalten, auf welche dann die Sätze, welche Formen dieser Art betreffen, sogleich angewendet werden können.

Ist eine Form, in der die Zeichen der Glieder abwechseln, als convergirend anerkannt, und hat man sie so geschlossen, daß die Summe der zusammengefaßten Glieder zu klein ist, (also mit einem negativen Gliede, falls sie mit einem positiven convergirend anhebt), so darf man ihr unmittelbar auf das letzte der zusammengefaßten folgendes Glied als Approximationsgrenze gebrauchen. Denn ist man bey einem negativen Gliede stehn geblieben, so geben alle folgenden Glieder, jedesmal benachbarte paarweise zusammengenommen, positive Resultate. Das Zusammengefaßte beträgt also zu wenig, wenn man sie wegläßt. Legt man ihm dagegen noch das nächstfolgende positive Glied zu, so werden alle hinter diesem nachkommenden, ebenso paarweise vereinigt, lauter negative Resultate bringen, man erhält also zu viel, falls sie unbeachtet bleiben. Der Zusatz aber, wodurch Ein Zuwenig für die gesuchte Größe in ein Zuviel für eben dieselbe verwandelt, ist eine Approximationsgrenze dieser Größe.

II. Approximativer Gebrauch der Exponenzialformel.

Die Grundformel des natürlichen Potenzensystems $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \ldots + \frac{x^n}{1 \ldots n} \ldots$ hat den unschätzbaren Vorzug, daß sie für jeden Werth von x allemal convergirend erscheint. Daß für jeden Werth von x, der ein echter Bruch ist, die Form convergiren muß, hat sie mit allen, in denen die Coeffizienten echte Brüche sind, gemein. Daß sie aber auch, falls x eine ganze Zahl oder ein unechter Bruch seyn soll, gleiche Brauchbarkeit besitze, läßt sich leicht zeigen.

Denn sey x so groß als es wolle, so wird man n jederzeit so nehmen können, daß für diese Reihe $\overset{n+1}{G} : \overset{n}{G} = \frac{x^{n+1}}{1..(n+1)} : \frac{x^n}{1..n} = \frac{x}{n+1}$ ein ächter Bruch wird, und alsdann muß für alle Werthe von n, die noch über den zuerst dieses leistenden hinausgehn, $\frac{x}{n+1}$ ein immer kleinerer ächter Bruch werden. Offenbar also, da jenseits des $n+1$ten Gliedes die Factoren, womit sich successiv die vorhergehenden Glieder multipliciren, um in die folgenden überzugehn, $\frac{x}{n+2}, \frac{x}{n+3}$.. sämmtlich geringer sind als $\frac{x}{n+1}$, werden die ferneren Glieder der Form kleiner, als wenn sie sich durch fortlaufendes Multipliciren mit dem ächten Bruche $\frac{x}{n+1}$ aus einander entwickelten. Mithin hat ihre Verringerung, rascher als die einer geometrischen Progression in welcher der Factor $\frac{x}{n+1} = f$ regierte, keine Grenze.

Hat man unter der Voraussetzung eines n, welches $\frac{x}{n+1} = f$ als einen ächten Bruch erscheinen läßt, die n ersten Glieder der Exponenzialreihe zusammengerechnet, so wird als Approximationsgrenze $\overset{n+1}{G}\left(\frac{1}{1-f}\right) = \frac{x^{n+1}}{1..(n+1)}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}\right)$ aufgestellt werden dürfen, welches offenbar mit steigendem n unter jede bestimmte Kleinheit herabsinken kann.

Für $x = 1$ verwandelt sich die Approximationsgrenze der Exponenzialreihe, weil $\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}$ alsdann $\frac{n+1}{n}$ wird, in $\frac{1}{1...n} \cdot \frac{1}{n}$. Also $\frac{1}{n}$ des letzten in die Summe aufgenom-

menen Gliedes ist alsdann die Größe, unter welcher der begangene Approximationsfehler unfehlbar liegt.

Es ist also klar, daß die Zahl e, welche dem natürlichen System zur Basis dient, aus seiner Grundformel: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} .. + \frac{x^n}{1..n} ..$ hervorgehend, wenn in derselben $x = 1$ gesetzt wird,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} .. + \frac{1}{1...n} ...$$ durch eine sehr schnell convergirende Reihe approximativ berechnet werden kann. Man hat sie durch den Gebrauch derselben gefunden:

$$e = 2,718281828439...$$

bedarf ihrer selbst aber nicht weiter, sofern man das natürliche Potenzensystem numerisch anwenden will.

Da negative Werthe von x in der Exponenzialreihe nur abwechselnde Zeichen der Glieder hervorbringen, so wird sie unfehlbar auch für solche convergent seyn. Da man bey Näherungsrechnungen jederzeit Nächstkleineres als das Gesuchte zu verlangen pflegt, so wird man die Form bey solchem Gebrauch derselben mit einem negativen (unpaaren) Gliede schließen, und alsdann das unmittelbar folgende positive Glied der Form als Approximationsgrenze gebrauchen dürfen, für $1 + x + \frac{x^2}{1.2} .. \frac{x^{2n-1}}{1...2n-1} ...$ als Summe, wird $\frac{x^{2n}}{1....2n}$ als Approximationsgrenze dienen dürfen. Wir besitzen also in der Exponenzialreihe eine Formel, deren Kraft zu numerischer Entwicklung aller Exponenzialgrößen im natürlichen System unbedingt ausreichend ist.

Die vollkommenste Probe der völligen Zulänglichkeit einer approximativen Formel besteht darin, wenn man durch sie nicht bloß für beliebige einzelne Werthe der Hauptgröße die zugehörigen des Gesuchten ableiten, sondern auch die Gesetze der gegenseitigen Beziehungen zwischen dem Gesuchten und der dasselbe bestimmenden Hauptgröße aus ihr entwickeln kann.

Sey der Exponent positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, so groß oder so klein als er wolle, so läßt sich durch

diese Formel der Werth seiner Potenz für jede beliebig festgestellte Approximationsgrenze immer berechnen, so daß eine geschlossene Zahl von Gliedern zu dieser Absicht hinreicht.

Es ist nur nöthig, Potenzen mit positiven Exponenten ursprünglich aus der Grundformel zu finden, da $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Mag der Exponent seyn, welcher er wolle, so gehört ihm eine bestimmte Zahl als Potenz an. Denn für jedes individuelle x ist $1 + x \ldots + \frac{x^n}{1 \ldots n}$ unfehlbar eine solche.

Dem größeren Exponenten gehört jedesmal ein größerer, dem kleineren ein kleinerer Potenzwerth.

Denn $e^{a+b} = e^a . e^b = e^a \left(1 + b + \frac{b^2}{1.2} \ldots + \frac{b^n}{1 \ldots n}\right)$. Der zweyte Factor ist allemal größer als 1, mithin $e^{a+b} > e^a$. Es kann also im reellen natürlichen System jedem Exponenten nur eine Zahl, als Werth der durch ihn bestimmten Potenz anheim fallen.

Jede Potenz von e, deren Exponent positiv ist, muß mehr als 1 betragen, denn $e^a = 1 + a \ldots + \frac{a^n}{1 \ldots n}$ ist immer größer als 1. Ebendeswegen muß jede, deren Exponent eine negative Zahl seyn soll, einen echten Bruch ergeben. Ist $e^a > 1$, so wird $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ohne Zweifel < 1.

Das natürliche Potenzensystem ist durchaus auf positive Zahlen beschränkt, und mag der Exponent positiv oder negativ, groß oder klein seyn, die ihm zugehörige Zahl muß immer das + Zeichen führen.

Ist a positiv, so ist es $1 + a + \frac{a^2}{1.2} \ldots + \frac{a^n}{1 \ldots n} = e^a$ gleichfalls; führt e^a immer das + Zeichen, so muß das Gleiche mit $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$ ohne Zweifel eintreten.

Hätte man die Absicht, in der That das natürliche Potenzensystem so zu berechnen, daß man, allmälig durch kleine Intervalle fortschreitend, die Exponenten ursprünglich annähme, und aus ihnen die zugehörigen Potenzen berechnete, so würden sich zu solcher Absicht Abkürzungen und Vortheile vielfacher Art entwickeln lassen.

Da aber für die Ausarbeitung dieses Systems grade der umgekehrte Weg zweckmäßiger gefunden ist, so haben solche Untersuchungen kein praktisches Interesse. Doch mag wenigstens ein dazu gehöriger Satz hier angeführt werden.

Wenn bey successiven Fortschritten von einem Exponenten zum andern nächsten, so kleine Intervalle angenommen würden, daß der jedesmalige Zusatz von dem vorigen Exponenten zu dem folgenden zugleich für die Rechnung als Näherungsgrenze diente, mithin, wenn e^a die vorige, e^{a+b} die nächstfolgende Potenz seyn sollte, b ein so kleiner echter Bruch wäre, daß Geringeres als er, gänzlich weggelassen werden dürfte, wo es als Theil zutreten mögte, so ist klar, weil $e^{a+b} = e^a . e^b = e^a\left(1 + b + \frac{b^2}{1.2} \ldots + \frac{b^n}{1\ldots n}\right)$, daß, wenn man im approximativen Gebrauch des zweyten Factors bey dessem ersten nachfolgenden Gliede, b, stehn bliebe, der dadurch begangene Fehler unter $\frac{b^2}{1.2}\left(\frac{1}{1-\frac{b^2}{1.2}}\right) = \frac{b^2}{1.2}\left(1 + \frac{b^2}{1.2}\right)$, mithin noch mehr unter b liegen würde, mithin $e^{a+b} = e^a(1+b)$ gesetzt werden dürfte, wodurch also das Fortschreiten von der vorigen Potenz zur folgenden auf eine unbedeutende Multiplication zurückkommen würde.

Es bedarf kaum einer Bemerkung, daß alle Sätze, welche hier von der Exponenzialreihe für das natürliche System entwickelt sind, mit geringer Modificationen auch von der allgemeinen Exponenzialformel gültig seyn müssen.

III. Approximative Berechnung der natürlichen Logarithmen.

1. Die erste Fundamentalformel der Entwicklung natürlicher Logarithmen

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

ist zufolge der Prinzipien in dieser Beziehung convergirend, sobald x ein echter Bruch, divergirend, jedesmal wenn x ein unechter Bruch ist. Noch dazu convergirt sie im ersten Fall sehr langsam, wofern nicht x ein echter Bruch von bedeutender Kleinheit ist; und, n als paar gedacht, wird $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ihre Approximationsgrenze in solchem Falle, einen sehr hohen Werth von n verlangen, um Sicherheit einer hinlänglichen Näherung zu gewähren. Es wäre also diese Formel, wenn man bey ihr stehen bleiben müßte, von sehr geringer numerischer Brauchbarkeit, und nur auf Zahlen zwischen 1 und 2 anzuwenden.

2. Setzt man in ihr statt $+x$ an die Stelle $-x$, so erhält man:

$$\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^n}{n} \ldots\right)$$

Auch sie convergirt nur für Werthe von x, die echte Brüche sind; man kann $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ als Approximationsgrenze für sie bezeichnen.

Aber sie besitzt eine viel umfassendere Brauchbarkeit als die vorige. Denn vermöge ihrer erhält man die Logarithmen aller echten Brüche, weil, sobald x ein beliebiger echter Bruch ist, $1-x$ gleichfalls jeden solchen darstellen kann. Freylich wird nur für ein bedeutend kleines x die Convergenz der Reihe beträchtlich seyn.

3. Es entsteht eine sehr brauchbare Combination, wenn man die beyden vorigen Formen durch Subtraction mit einander verbindet

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} \cdot\cdot + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

und ihre Kraft tritt am besten hervor, wenn man für $\frac{1+x}{1-x}$ ein eigenes Zeichen $= z$ setzt, wodurch umgekehrt $\frac{z-1}{z+1} = x$ wird. Dann ergibt sich die Form:

$$\log z = 2\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \ldots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n-1}\ldots\right]$$

welche, so oft $\frac{z-1}{z+1}$ ein echter Bruch ist, jederzeit, obschon in den meisten Fällen nicht rasch, convergirt.

Aus dieser letzten Formel läßt sich in Absicht auf den Zusammenhang zwischen natürlichen Logarithmen und Zahlen folgendes numerisch nachweisen.

Jede positive Zahl z, sie sey größer oder kleiner als 1, hat nothwendig einen natürlichen Logarithmen, und er läßt sich berechnen. Denn sobald z positiv ist, wird $\frac{z-1}{z+1}$ ein echter Bruch, mithin die nach dessen Potenzen fortschreitende Reihe, woraus sich log z ergibt, eine convergirende.

---

*) Daß sie für $x = 1$ nicht convergiren kann, versteht sich von selbst, da sie alsdann log o bedeuten würde. Es läßt sich aus ihrer Form selbst ableiten. Mehr Umstände würde der Werth von $\log(1+x)$, für $x = 1$, oder die Form $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \log 2$ machen, um die Frage, ob sie convergire, zu entscheiden. Hier ist dies überflüssig. Denn wenn man in $\log(1-x)$ statt $x = \frac{1}{2}$ setzt, so convergirt die Form gewiß und gibt $\log\frac{1}{2}$, wovon das Umgekehrte log 2. In der allgemeinen Theorie der Convergenz und Divergenz

Jede positive Zahl größer als 1 hat einen positiven Logarithmen. Denn ist sie z, so wird $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ unfehlbar positiv und die Summe der Reihe, die nach dessen Potenzen fortschreitet, gleichfalls.

Jeder echte Bruch hat nothwendig eine negative Zahl zum Logarithmen. Denn ist z ein echter Bruch, so muß $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ eine negative Zahl werden, und eine Reihe, welche bloß unpaare Potenzen einer solchen in sich faßt, wie die für log z, muß alsdann eine negative Summe geben.

Jeder positiven Zahl, die über 1 hinausgeht, gehört, sobald sie wächst, ein größerer Logarithme. Denn wenn x größer als 1, mithin $\frac{x-1}{x+1}$ ein echter Bruch ist, so wird dieser echte Bruch, sofern Zähler und Nenner desselben durch Zunahme des x um gleichviel wachsen, größer werden, als vorhin, mithin die Summe einer convergirenden Reihe, die nach seinen Potenzen fortschreitet, gleichfalls. Aus diesem Grunde hat jede Zahl, welche mehr beträgt als 1, nur einen einzigen Logarithmen. Und es folgt daraus von selbst, daß alle Zahlen, die zwar positiv aber kleiner als 1 sind, für die also $\frac{z-1}{z+1}$ etwas Negatives wird, zwar sämmtlich negative Zahlen als Logarithmen erhalten müssen, daß aber jeder geänderten Zahl dieser Art ein anderer Logarithme zukommen muß, folglich auch jede solche nur einen Logarithmen haben kann.

Für negative Zahlen, wenn man den Logarithmen einer solchen berechnen wollte, versagen die Entwicklungsformen

---

sind gerade diese beiden Reihen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots$ und $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots,$ von besonderem Interesse.

durchaus jede Convergenz, mithin die Möglichkeit das Gesuchte approximativ zu berechnen, denn sowohl die Form $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$, wenn man in ihr x negativ und größer als 1 nehmen wollte, als die: $\log z = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \ldots$, falls man überhaupt in derselben für z etwas Negatives setzte, würden durchaus divergirend ausfallen. So bestätigt es sich rückwärts, was bereits direct bey der numerischen Berechnung der Exponenzialgrößen dargethan worden, daß keine negative Zahl als Potenz im natürlichen System erscheinen kann, daß also natürliche Logarithmen negativer Zahlen, sofern sie selbst bestimmte reelle Zahlen seyn sollen, durchaus nicht möglich sind.

Es lassen sich aus der ersten Fundamentalformel für die Entwicklung der natürlichen Logarithmen, noch viele andere ableiten, die darauf hinausgehen, daß man aus den bekannten Logarithmen gewisser Zahlen, diejenigen von andern ableitet, die mit den erstgenannten Zahlen in gegebenem Zusammenhange stehn. Einige dieser Art mögen wegen ihrer vielfachen Brauchbarkeit hier ihre Stelle finden.

4. Ist $\log a$ bekannt, so wird, da $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

$\log(a+b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. Der letzte Theil nach der Grundformel entwickelt gibt: $\log(a+b) =$

$$\log a + \frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^n \ldots$$

Diese Formel ist besonders darum so wichtig, weil sie zeigt, wie leicht das Fortschreiten von dem Logarithmen einer Zahl zu dem einer andern ist, vorausgesetzt, daß der Unterschied dieser Zahlen verhältnißmäßig gegen sie selbst gering ist. Hätte man b gegen a so klein genommen, daß $\frac{b}{a}$ als Approxima-

tionsgrenze dienen dürfte, so würde $\log(a+b) = \log a + \frac{b}{a}$ seyn.

5. Noch raschere Näherung könnte man in gleichem Falle erhalten, wenn man statt $1+\frac{b}{a} = \dfrac{1+\frac{b}{2a+b}}{1-\frac{b}{2a+b}}$ setzte, welches ihm an Werth identisch ist, und nun die Formel 3, in ihr $x = \frac{b}{2a+b}$ substituirend, in Anwendung brächte. Dadurch erhielte man

$$\log(a+b) = \log a + 2\left[\left(\frac{b}{2a+b}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 \ldots + \frac{1}{2r+1}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^{2r+1} \ldots\right]$$

6. Setzt man in der Fundamentalformel $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ldots$ für x an die Stelle $\frac{1}{z}$, so ergibt sie: $\log\left(1+\frac{1}{z}\right) = \log\frac{1+z}{z} = \log(1+z) - \log z = \frac{1}{z} - \frac{1}{2.z^2} \ldots (-1)^{n-1} . \frac{1}{n z^n} \ldots$

Auf gleiche Art die Formel für $\log(1-x)$ behandelt findet sich

$$\log(z-1) - \log z = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2.z^2} \ldots + \frac{1}{n z^n} \ldots\right).$$

Aus beyden Sätzen $\log z$ gesucht, sie dann durch Addition verbunden, und von der Summe die Hälfte angesetzt, hat man:

$$\log z = \tfrac{1}{2}\log(z-1) + \tfrac{1}{2}\log(z+1) + \frac{1}{2.z^2} + \frac{1}{4.z^4} \ldots + \frac{1}{2nz^{2n}} \ldots$$

Diese Formel würde, bey würklicher Berechnung des Potenzensystems, von gutem Nutzen seyn. Daß bey einer solchen nur die Logarithmen der Primzahlen zu suchen sind, versteht sich von selbst. Ist z eine solche, so sind $z-1$ und $z+1$ aus

Factoren zusammengesetzt. Diese Factoren sind kleinere Primzahlen als z; man wird also, bey regelmäßigem Fortschreiten der Rechnung, ihre Logarithmen schon haben.

Aehnliches läßt sich durch kleine Kunstgriffe noch auf mancherley Art leisten.

7. Will man überhaupt die Berechnung eines Potenzensystems organisiren, und sich in Besitz gewisser Fundamentalzahlen setzen, aus denen nachher durch leichte Rechnungen für alle übrigen das Gewünschte erhalten werden kann, so ist ohne Frage die Methode die zweckmäßigste, welche in der That von den ersten Berechnern der logarithmischen Tafeln gebraucht worden ist. Diese Methode setzt voraus, daß man die Logarithmen der successiven Potenzen von 10; die der 9 ersten ganzen Zahlen, und die der unechten Brüche von 1,1; 1,2; ... 1,9; ebenso der von 1,01; .... 1,09; allgemein der unechten Brüche von der Form $1+\frac{a}{10^n}$, wo a alle Werthe von 1 bis 9 haben kann, n bis zu der Zahl aufsteigen muß, welche die Menge von Decimalstellen anzeigt, bis zu welcher die Berechnung getrieben werden soll, zuvörderst berechnet habe. Eine Tabelle, welche alle jene Logarithmen enthält, ist leicht zu Stande gebracht, weil zu ihr die erste Grundreihe für log $(1+x)$ unmittelbar gebraucht werden darf. Sie wird am besten für jedes Potenzensystem besonders berechnet, und mag, da sie auf einen geringen Raum zusammengedrängt werden kann, sowohl für das natürliche, als für das gemeine Logarithmensystem im Anhange dieser Schrift ihre Stelle finden. Diese Tabelle vorausgesetzt, kann man in beyden Systemen für alle Zahlen, die nicht über 20 Ziffern hinausgehn, bis auf eben so viele Decimalstellen der Logarithmen sehr leicht erhalten, sobald man im Stande ist, die gegebene Zahl in Factoren der angenommenen Form aufzulösen, und es wird dies zu

gestanden, nichts als eine Addition ihrer aus der Tabelle bekannten Logarithmen erforderlich seyn.

Dividirt man eine beliebige mehrziffrige ganze Zahl durch ihre eigene höchste Ziffer, so erhält man zum Quotienten sofort eine Zahl, deren erster Theil 1, deren zweyter Theil ein angehenkter echter Decimalbruch ist. Jede Zahl solcher Form $1 + \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} \ldots$, wenn man sie durch den Inbegriff ihrer beyden ersten bedeutenden Ziffern $1 + \frac{a}{10^n}$ dividirt, gibt zum Quotienten eine ähnlich gebildete, in welcher die zweyte bedeutende Ziffer ein einfacher Decimalbruch, dessen Nenner um einen Rang höher geworden seyn muß, $1 + \frac{b}{10^{n+1}} + .$ Es ist also klar, daß man nur einige successive Divisionen der letzteren Art an den allmälig hervortretenden Quotienten zu vollziehn braucht, um, mit beliebiger Approximation, den allerersten Quotienten in ein Product aus lauter Factoren der Form $1 + \frac{a}{10^n}$ aufzulösen.

Dieses Verfahren gestattet noch außerdem einen leichten und abkürzenden Mechanismus. Doch dürfte die Rechnung auf folgendem indirecten Wege am schnellsten zum Zwecke führen.

Dividirt man eine vielziffrige Zahl durch ihre, um eine Einheit erhöhte, Anfangsziffer, mit Beybehaltung des Ranges, welchen sie besitzt, so erscheint sie als ein Product aus zwey Factoren, von denen der erste die jenen Rang besitzende Ziffer, der zweyte ein echter Bruch, wenig von der Einheit verschieden, seyn wird. Sie ist dadurch, wenn a eine einfache Ziffer, B einen echten Decimalbruch bedeutet, auf die Form $A = a . 10^n . B$, gebracht. Könnte man nun einen Factor, oder einen Inbegriff von Factoren, f, finden, welcher $B . f = 1$ machte, und wäre der Logarithme eines solchen schon bekannt, wie der von

der einfachen Ziffer a, und der von 10^n, so hätte man den Logarithmen der Zahl. Denn es wird der Annahme gemäß $Af = a.10^n.B.f = a.10^n$ seyn. Mithin $A = \frac{a.10^n}{f}$; also log $A = \log(a.10^n) - \log f$.

Es bedarf jetzt nur noch eines leichten Satzes aus der Lehre von der dekadischen Multiplication. Sey ein echter Decimalbruch, der in seinen vorderen Stellen lauter 9, erst in der $n$ten und nachherigen andere beliebige Ziffern, α, β, γ. u. s. w. enthält, vorhanden. Denkt man sich einen solchen, von 1 abgezogen, und setzt man $9-\alpha = a$; $9-\beta = b$; $9-\gamma = c$ u. s. w., so wird der Rest: $\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} + \ldots$ Man wird also jenen anfänglichen Bruch durch $1-\left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right)$ andeuten mögen.

Und nun sucht man einen Factor von der Form $1 + \frac{x}{10^n}$, unter der Bedingung, x so zu bestimmen, daß der anfängliche Bruch, mit diesem Factor multiplicirt, ein Product gebe, noch weniger als er, und so wenig als im Allgemeinen auf diese Art möglich, von 1 verschieden ausfallend.

Die würkliche Multiplication der beyden Factoren gibt $1 - \left(\frac{a-x}{10^n} + \frac{b..}{10^{n+1}}\right)$. Es wird dem gemäß so nahe als möglich an 1 gerückt seyn, da angenommen, daß es immer unter 1 bleiben soll, wenn $a - x = 0$, also $x = a$. Daher die Regel: hat man einen echten Decimalbruch, und verlangt man einen Factor, dessen erster Theil 1, der zweyte ein einfacher Decimalbruch seyn soll, um jenen gegebenen durch Multiplication so nahe an 1 zu führen, als es mit Sicherheit dadurch im Allgemeinen geschehen kann, so muß

der Zähler dieses einfachen Decimalbruchs die Ergänzung zu 9 für die höchste Ziffer in dem gegebenen Decimalbruche, welche noch nicht selbst = 9 ist, sein Nenner muß von demselben Range mit dem jener höchsten Ziffer seyn. Diese Regel allmälig immer fort anwendend, bekommt man sehr leicht eine Reihe von Factoren der verlangten Form, welche einen gegebenen echten Decimalbruch, so nahe als man will, multiplicirend auf 1 zurückbringen.

Wenn man also nur die aus der bereit liegenden Hülfstabelle genommenen Logarithmen dieser Factoren summirt, und dies vom Logarithmen der höchsten Ziffer in der anfänglichen Zahl, auch den Rang dieser Ziffer beybehalten, abzieht, so hat man das Verlangte.

Es bedarf wohl keiner ausführlichen Auseinandersetzung, daß unsre Hülfstabellen eben so bequem sind, um die umgekehrte Frage, zu einem Logarithmen die zugehörige Zahl zu berechnen, sogleich zu beantworten. Sie geben durch leichte Abziehung der größtmöglichen in ihnen stehenden Logarithmen von dem gegebenen, sogleich die Factoren von der Form $\left(1 + \frac{a}{10^n}\right)$, welche in der gesuchten Zahl enthalten sind, und die fast mit gar keiner Mühe zu vollziehende Multiplication dieser Factoren bringt die gesuchte Zahl selbst hervor.

Ueberhaupt lassen sich bey dem ganzen Verfahren noch mancherley Abkürzungen und Vortheile anbringen, deren Darstellung aber an dieser Stelle unzweckmäßig seyn möchte.

Alle vorhin zum Zweck der Logarithmenberechnung entwickelten Reihen geben zwar nur natürliche Logarithmen, aber vermöge des bekannten Satzes, daß log N bas b $= \frac{\text{Log nat N}}{\text{Log nat b}}$, können aus ihren Resultaten sogleich die

Logarithmen für jede beliebige Basis abgeleitet werden. So würden, da $\frac{1}{\log \text{nat } 10} = 0{,}4342944819..$, die natürlichen Logarithmen, indem man jeden derselben damit multiplicirte, sofort in briggische verwandelt.

Zwölftes Kapitel.

Theorie der imaginären Exponenzialgrößen im natürlichen System.

---

1. Grundidee imaginärer Exponenzialgrößen, und Grundformel ihrer Entwicklung.

Man überzeugt sich schon in der Elementararithmetik, und namentlich zum ersten Male bey der Ausziehung der Quadratwurzel, davon, daß es arithmetische Operationen gibt, deren Vollziehung an bestimmt gegebenen Zahlen, man mag sie genau, oder näherungsweise vollführen sollen, der Natur der Zahlen, und den Gesetzen der Zahlverknüpfungen widerstreitet. Man nennt Ausdrücke, in denen solche Operationen verlangt werden, **Unmögliches fordernde** oder **imaginäre Ausdrücke**. Sie bestehn offenbar in Andeutungen, wie im einfachsten Falle $\sqrt{(-b)}$ eine solche darstellt, und Wurzelausziehungen höherer Grade ähnliche mit sich bringen. Auf gleiche Weise gerathen wir bey der Bildung des einfachsten Potenzensystems, wenn wir negative Zahlen in dasselbe aufnehmen wollen, auf eine Forderung, welche den Entwicklungsgesetzen des Calculs durchaus entgegen ist, und $\log(-b)$ kann den Regeln der Potenzirung gemäß eben so wenig gefunden werden, als $\sqrt{(-b)}$ zufolge der Gesetze, welche für die Multiplication statt haben, man mag es durch eine wirkliche Zahl genau oder approximativ ausdrücken wollen.

Und dennoch sind Ausdrücke, in denen solche Forderungen aufgestellt werden, für die Wissenschaft von der höchsten Wichtigkeit, und alle Allgemeinheit derselben würde zu Grunde gehn, wenn sie nicht, ungeachtet sie absolut etwas durchaus Unstatthaftes verlangen, hypothetisch in dieselbe aufgenommen würden.

So wie überhaupt das Rechnen in der höheren Arithmetik auf ein Rechnen mit Andeutungen zurückkommt, so wird es gestattet seyn, auch Ausdrücke der eben bezeichneten Art anzusehn, als wenn sie würklich fähig wären, Zahlen zu werden, und in sofern auch den Gesetzen unterworfen werden könnten, denen Andeutungen würklicher Zahlen ihrer Natur nach gehorchen müssen. So entsteht ein hypothetisches Rechnen, dessen Resultate gleichfalls hypothetisch sind. Es kann weder in der Idee noch in der Ausführung Schwierigkeit haben, zu entwickeln, was für Resultate entspringen würden, wenn die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl möglich wäre, mithin die Andeutung $\sqrt{(-b)}$ nur eine aufgeschobene Rechnung, fähig eine bestimmte Zahl zu geben, darstellte, und unter dieser Voraussetzung auf dieselbe Art in weitere Rechnungen verflochten würde, wie es bey solchen Radicalgrößen, sofern sie eine reelle Bedeutung haben, den Regeln der Arithmetik gemäß, gestattet ist.

Sofern die Arithmetik das Rechnen mit Andeutungen, die reelle Zahlen repräsentiren, den erforderlichen Regeln bereits unterworfen hat, bedarf es also keiner weiteren Vorschriften in Absicht auf das hypothetische Rechnen mit imaginären Ausdrücken der vorhin bezeichneten Art, sofern nicht besondre Zusammenziehungen dabey beabsichtigt werden. Und es ist sehr zweckmäßig, diesen Theil des numerischen Calculs erst dann vorzunehmen, wenn sich die Grundlehren über Exponenzialgrößen entwickelt haben.

Das zuerst in der Arithmetik hervortretende, und, wie sich weiterhin zeigen wird, fundamentale Schema des imaginären Ausdrucks $\sqrt{(-b)}$ läßt sich noch vereinfachen. Ließe sich

wirklich aus $-b$ die Quadratwurzel ziehn, so dürfte man, statt $-b$ setzend $b(-1)$, für $\sqrt{(-b)} = \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{-1}$ substituiren. Offenbar also wäre, wenn der reelle Ausdruck $\sqrt{b} = a$ genommen wird, $\sqrt{-b} = a\sqrt{-1}$, und darauf kann das Imaginäre der Quadratwurzel-Ausziehung zurückgebracht werden.

Um nun die Formen der Exponenzialgrößen, sofern es thunlich ist, zu größerer Allgemeinheit zu erheben, als ihnen zu Theil werden kann, wenn man für die Exponenten reelle Zahlen setzt, mag zuvörderst die Frage aufgeworfen werden, welche Werthe Größen dieser Art hypothetisch zu erlangen fähig seyn würden, wenn man annehmen wollte, die einfachste Unmöglichkeit, welche die Arithmetik enthält, finde nicht statt; Andeutungen, in denen Ausziehung der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl gefordert wird, wären nur aufgeschobene Rechnungen, aus denen eine wirkliche Zahl hervorgehn könnte, dürften also in die Rechnung eingeführt werden.

Denkt man sich $a\sqrt{-1}$ als wenn es eine noch nicht entwickelte Zahl wäre, mithin auch zum Exponenten einer Potenz erhoben werden könnte, so würde man berechtigt seyn, in der Reihe, welche für e^x, sofern x irgend einen reellen Werth hat, abgeleitet ist, statt x das Imaginäre $a\sqrt{-1}$ zu substituiren, um weiter zu untersuchen, wie sich der daraus entstehende Ausdruck zusammenziehn ließe.

Man erhält aus $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} \ldots \frac{+x^{2n}}{1..2n}$ $+ \frac{x^{2n+1}}{1.2(2n+1)} + ..$ wenn $x = a\sqrt{-1}$ gesetzt wird:

$$e^{a\sqrt{-1}} = 1 + (a\sqrt{-1}) + \frac{(a\sqrt{-1})^2}{1 . 2} \ldots + \frac{(a\sqrt{-1})^{2n}}{1 . . 2n}$$
$$+ \frac{(a\sqrt{-1})^{2n+1} \ldots}{1 \ldots (2n+1)}$$

Da wir hypothetisch unter $\sqrt{-1}$ eine Zahl verstehn, die mit sich selbst multiplicirt -1 geben würde, so müßte unter

dieser Voraussetzung $(\sqrt{-1})^{2n} = [(\sqrt{-1})^2]^n = (-1)^n$, und $\sqrt{(-1)^{2n+1}} = \sqrt{(-1)^{2n}} . \sqrt{(-1)^1} = (-1)^n \sqrt{-1}$ seyn. Alle Glieder der vorliegenden Reihe also, welche von paarer Zahl sind, könnten, weil sie nichts Imaginäres enthalten, für sich, und alle von unpaarer Zahl, weil sie sämmtlich den Factor $\sqrt{-1}$ führen, insofern also imaginär und gleichartig sind, wiederum für sich, zusammengezogen werden. So fände sich:

$$e^{a\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{a^2}{1.2} \cdot\cdot \frac{(-1)^n a^{2n}}{1..2n} \cdot\cdot\right)$$
$$+ \left(a - \frac{a^3}{1..3} \cdot\cdot \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{1..(2n+1)} \cdot\cdot\right) \sqrt{-1}.$$

Es kommt also offenbar, um $e^{a\sqrt{-1}}$ hypothetisch zu berechnen, nur darauf an, daß man zwey Reihen, beyde nach Potenzen von a fortschreitend, ausbildet. Da diese Reihen, so wie die ursprüngliche Exponenzialreihe, woraus sie entstehn, jederzeit convergiren, so steht der Ausführung nichts entgegen, auch wenn man das allgemeine Schema numerisch gebrauchen will.

Bey Formen, welche so oft angewendet werden müssen, als die vorliegenden, ist zur Abkürzung Kunstsprache unentbehrlich. Es soll also die Reihe $1 - \frac{a^2}{2} + ..(-1)^n \frac{a^{2n}}{1..2n} ...$ künftig mit der Benennung Cosinus der Zahl a, (cosin a), und die Reihe $a - \frac{a^3}{1..3} .. \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{1..(2n+1)} + ...$ mit dem Namen Sinus der Zahl a, (sin a) bezeichnet, mithin $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a) \sqrt{-1}$ gesetzt werden. Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß hier, im analytischen Sinne, den Wörtern Sinus und Cosinus einer Zahl durch willkührliche Erklärung eine Bedeutung beygelegt wird, wobey zunächst an die Trigonometrie, sofern sie Cosinus und Sinus von Winkeln aufführt, durchaus nicht gedacht werden darf, eben so wenig als in der Arithmetik, wo von Quadraten der Zahlen die Rede ist, der

geometrische Sinn des Worts Quadrat in Anspruch genommen wird.

Die Form $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$ enthält in sofern eine Zweydeutigkeit als $\sqrt{(-1)}$, wenn es sich darstellen ließe, nicht bloß mit dem + Zeichen, sondern auch mit dem — Zeichen genommen werden könnte. Setzt man bey ihrer Ableitung für $+a\sqrt{-1}$ an die Stelle $-a\sqrt{-1}$ so erhält man: $e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - (\sin a)\sqrt{-1}$.

Dadurch würde es sofort möglich seyn, umgekehrt die Bedeutung des Cosinus und Sinus auf Exponenzialgrößen zurückzuführen, da offenbar, beyde Gestalten der Grundform zusammenaddirt, $\frac{e^{+a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \cos a$, von der ersten die zweyte abgezogen, $\frac{e^{+a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}} = \sin a$ hervorgeht. Zur unmittelbaren Berechnung können diese hypothetischen Formen nicht behülflich seyn.

II. Würkliche Berechnung eines Potenzensystems von der Form $e^{a\sqrt{-1}}$.

Bey der würklichen Ausbildung des reellen natürlichen Potenzensystems hat zwar die Exponenzialreihe $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{1.2} \ldots + \frac{a^n}{1..n} \ldots$ zum Fundament gedient, aber man hat es am zweckmäßigsten gefunden, die in ihr enthaltenen Beziehungen umzukehren, und dem gemäß, $e^a = A$ gesetzt, die berechneten Werthe der Potenzen, A, als gegeben anzunehmen, um daraus, rückwärts, die Exponenten a abzuleiten.

Für die Entwicklung eines Potenzensystems von der Form $e^{a\sqrt{-1}}$ ist aber der ursprüngliche Weg, dem a allmälig alle nöthig erachteten Werthe zu ertheilen, und daraus nach

den Grundformeln $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$ abzuleiten, der angemessenste, wobey mithin jedesmal die Reihen für:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \ldots (-1)^n \frac{a^{2n}}{1..2n} \ldots \text{ und}$$

$$\sin a = a - \frac{a^3}{1..3} \ldots (-1)^n \frac{a^{(2n+1)}}{1..(2n+1)}$$

in Anspruch genommen werden müssen.

Die Arbeit würde nicht zu ertragen seyn, wenn, durch sehr kleine Intervalle fortschreitend, für jedes positive oder negative ganze oder gebrochene a ein ursprüngliches Rechnen nöthig wäre. Es zeigt sich aber sehr bald, daß wofern nur für gewisse, innerhalb sehr enger Grenzen liegende Werthe von a, Cosinus und Sinus berechnet sind, mithin $e^{a\sqrt{-1}}$ formirt werden kann, für alle übrigen Werthe von a, der entwickelte Ausdruck von $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$ aus jenen mittelbar leicht abzuleiten ist. Die wichtigsten der dahin führenden Sätze sind folgende:

A. Aus dem Cosinus einer Zahl ergibt sich ihr Sinus und umgekehrt.

Ist $e^{+a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$

und $e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - (\sin a)\sqrt{-1}$,

so wird das Product beyder Formen

$e^0 = 1 = \cos a^2 + (\sin a)^2$.

Man hat also $\sin a = \sqrt{[1 - (\cos a)^2]}$ oder $\cos a = \sqrt{[1 - (\sin a)^2]}$.

B. Aus Sinus und Cosinus der positiven Zahl folgen die der negativen.

Die Reihe für cos a, weil sie nur paare Potenzen von a in sich schließt, behält denselben Werth, man setze in ihr + a oder — a; die für sin a, weil sie unpaare Potenzen von a enthält, ändert in jedem Gliede ihr Zeichen, sobald

man für + a substituirt — a. Es ist also $\cos(+a) = \cos(-a)$ und $\sin(-a) = -\sin(+a)$.

C. Aus Sinus und Cosinus einzelner Zahlen folgen die ihrer Summe oder Differenz.

Ist $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$

und $e^{b\sqrt{-1}} = \cos b + (\sin b)\sqrt{-1}$, so gibt das Product beyderseitig:

$e^{(a+b)\sqrt{-1}} = \cos a \cos b - \sin a \sin b + (\sin a \cos b + \sin b \cos a)\sqrt{-1}$.

Nach der Grundformel ist:

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}} = \cos(a+b) + [\sin(a+b)]\sqrt{-1}$$

Man hat also, Gleichartiges identifizirt:

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

2) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Setzt man darin für $+b$ an die Stelle $-b$, so erhält man, da nach der Regel B, $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$:

3) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

4) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Diese Formeln, aus denen sich eine große Zahl andrer ähnlich gebildeter ableiten lassen, sind für die Berechnung eines imaginären Potenzensystems von großer Wichtigkeit.

Schritte man dabey durch sehr kleine Intervalle in Absicht auf die successiven Werthe von a fort, so daß also, falls a und $a \pm b$ zwey nächstbenachbarte darstellen, b ein so kleiner Bruch wäre, daß höhere Potenzen desselben für die beabsichtigte Näherung weggelassen werden könnten, so wäre dem gemäß, zufolge der Grundformeln für $\cos b$ und $\sin b$, $\cos b = 1$ und $\sin b = b$. Man erhielte mithin:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \mp (\sin a)\, b \text{ und}$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \pm (\cos a)\, b$$

Hätte man also $\cos a$ und $\sin a$, so würden daraus, durch die leichteste Rechnung, $\cos(a \pm b)$ und $\sin(a \pm b)$ hervor-

gehn, auf ähnliche Art wie man, wenn b gegen a so klein ist, daß höhere Potenzen des Bruchs $\frac{b}{a}$ vernachlässigt werden dürfen, $\log(a \pm b) = (\log a) \pm \frac{b}{a}$ zu setzen berechtigt ist. So entsteht hier, wie bey den Logarithmen, die Möglichkeit von Proportionaltheilen.

D. Aus Sinus und Cosinus gegebener Zahlen ergeben sich die beliebiger Vielfacher derselben Zahlen.

Ist $e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$,
so erhält man auf beyden Seiten zur n^{ten} Potenz erhoben:
$e^{na\sqrt{-1}} = [\cos a + (\sin a)\sqrt{-1}]^n = \cos na + (\sin na)\sqrt{-1}$.
Erhebt man in der That diesseits zur vorgeschriebenen Potenz, so enthalten alle paaren Glieder der Entwicklung kein $\sqrt{-1}$, ihr Inbegriff muß also das jenseitige $\cos na$ geben. Aus umgekehrtem Grunde wird der Inbegriff aller unpaaren Glieder derselben Entwicklung mit $(\sin na)\sqrt{-1}$ zusammenfallen. Man erhält also:

$$5)\ \cos na = (\cos a)^n - {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-2} \,.\, (\sin a)^2 \ldots (-1)^r \,.\, {}^{n}\overset{2r}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-2r} \,.\, (\sin a)^{2r}.$$

$$6)\ \sin na = {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-1}(\sin a) - {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-3}(\sin a)^3 \ldots (-1)^r\, {}^{n}\overset{2r-1}{\mathfrak{B}}(\cos a)^{n-(2r-1)}(\sin a)^{2r-1}.$$

Diese Formeln sind völlig geschlossen, und also unbedingt anwendbar, wenn n eine ganze positive Zahl ist: Formell gültig sind sie auch für negative und gebrochene Werthe von n. Nur würde in diesem Falle, ob sie zur nähernden Berechnung brauchbar sind, weiter zu erforschen seyn.

E. Es ist nur nöthig, für alle positive Zahlen zwischen o und einer bestimmten fast in der Mitte von 1 und 2 liegenden Zahl, deren Cosinus o ist, $e^{a\sqrt{-1}}$ ursprünglich zu berechnen.

Daraus werden, für alle übrigen Werthe von a, die zugehörigen der Exponenzialgröße $e^{a\sqrt{-1}}$, mithin für jeden derselben sowohl cos a als sin a, ohne weitere Rechnung folgen.

Die Ableitung dieses Satzes zerfällt in zwey Unterabtheilungen.

a. Es gibt eine Zahl zwischen 1 und 2, deren Cosinus = o ist.

Um zu erforschen, ob es nicht einen bestimmten Werth von a gebe, für welchen cos a = o, sin a also = 1 seyn könnte, ist es am zweckmäßigsten, die Beziehungen zwischen der Zahl a auf der einen, und ihrem Sinus und Cosinus auf der andern Seite, umzukehren.

Durch Division combinirt, geben die beyden ersten Fundamental-Ausdrücke

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos a + (\sin a)\sqrt{-1}$$
$$e^{-a\sqrt{-1}} = \cos a - (\sin a)\sqrt{-1}$$

$$e^{2a\sqrt{-1}} = \frac{\cos a + (\sin a)\sqrt{-1}}{\cos a - (\sin a)\sqrt{-1}} = \frac{1 + \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)\sqrt{-1}}{1 - \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)\sqrt{-1}}$$

Auf beyden Seiten die Logarithmen genommen:

$$2a\sqrt{-1} = \log\left(\frac{1 + \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)\sqrt{-1}}{1 - \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)\sqrt{-1}}\right)$$, und folglich

$$a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(\frac{1 + \frac{\sin a}{\cos a}\sqrt{-1}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\sqrt{-1}}\right)$$

Zur unmittelbaren Berechnung ist freylich die Formel, weil sie imaginäre Ausdrücke enthält, nicht geschickt, diese verschwinden aber, wenn man ihren Werth nach den Methoden des vorigen Kapitels in eine Reihe entwickelt. So entsteht

$$a = \frac{\sin a}{\cos a} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^5 \ldots \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot$$

$$\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^{2n+1} \ldots$$ Die Reihe enthält zwar nicht bloß cos a, sondern auch sin a, indessen ist durch cos a zugleich sin a gegeben, da $\sin a = \sqrt{(1 - \cos a^2)}$. Sie ließe sich also in eine völlig regelmäßige, bloß nach Potenzen von cos a fortschreitende, umsetzen. Indessen ist eine solche Arbeit zu unserer particulären Absicht unnöthig, ja sie würde die Erreichung derselben nur erschweren. Convergent ist die Reihe in ihrer jetzigen Gestalt, sobald sin a kleiner seyn soll als cos a, denn alsdann wird die Größe, nach deren Potenzen sie eigentlich fortschreitet, $\frac{\sin a}{\cos a}$ ein ächter Bruch.

Aber unmittelbar zu unsern Zwecken scheint sie doch nicht gebraucht werden zu können. Wir wollen für cos a = o, wo also sin a = 1, den Werth von a wissen. Alsdann aber wird die Hauptgröße der Reihe $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{0}$, hört also auf, eine Zahl zu seyn, und gestattet keine Berechnung mehr. Es wird in der That ein kleiner Kunstgriff erfordert, um dennoch das Gesuchte zu erhalten.

Aus der kurz vorher abgeleiteten Formel D, 5 folgt, in ihr statt $n = 3$ gesetzt:

$$\cos 3a = (\cos a)^3 - 3 (\cos a) (\sin a)^2.$$

Angenommen, es sey 3a gerade die Zahl p, deren Cosinus = o, so kommt: $o = (\cos a)^3 - 3 (\cos a)^2 \sin a$, daraus aber ergibt sich:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \frac{1}{3} p}{\cos \frac{1}{3} p}$$

Man setze also in der allgemeinen Reihe, welche a, nach Potenzen der Größe $\frac{\sin a}{\cos a}$ fortschreitend, gibt, für $\frac{\sin a}{\cos a}$ den Werth $\frac{1}{\sqrt{3}}$; was sie alsdann hervorbringt, wird $\frac{1}{3}$ p seyn; und man braucht diese Größe nur mit 3 zu multipliciren, um das gesuchte p, d. h. diejenige Zahl, zu erhalten, deren Sinus 1, Cosinus 0 seyn wird. Es ist also

$$p = \sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} \ldots (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^n} \ldots\right]$$

Diese Form convergirt sehr rasch, und gibt p = 1,5707963267 94... Man hat aus Gründen, die nicht hieher gehören, nicht für diese Zahl, sondern für das Doppelte von ihr, das Zeichen π eingeführt, so daß also inskünftige immer $\frac{\pi}{2}$ jene zwischen 1 und 2 fallende Zahl bedeuten soll, deren Cosinus = o wird. Die Zahl selbst wird in der Analysis nicht weiter zu numerischen Angaben gebraucht, so daß es kaum nöthig ist, sich ihren Betrag genau zu bemerken, sofern es auf die Theorie der Potenzensysteme ankommt.

b. Für jeden positiven Werth von a, zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ hat die Größe $e^{a\sqrt{-1}}$ einen bestimmten eigenthümlichen, partiell imaginären Werth, der aus den Grundformeln für cos a und sin a näherungsweise erhalten werden kann.

Jede Zahl zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ hat einen besonderen, positiven echten Bruch zum Cosinus, und ebendeswegen einen gleichgestalteten zum Sinus.

Daß der Cosinus so wie der Sinus jeder Zahl nichts anders als ein echter Bruch seyn kann, ergibt sich daraus, daß $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$, von selbst.

Was das Zeichen betrifft, so sind zwey Fälle zu betrachten. Ist die Zahl a kleiner als 1, oder ihm gleich, so bringt die Form für cos a unfehlbar etwas Positives, da, wenn man

benachbarte Glieder in ihr zusammenaddirt, deren Summe, allgemein $\frac{a^{2n}}{1 \ldots 2n} \left[1 - \frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)} \right]$ jederzeit positiv ist, und eine convergirende aus lauter positiven Gliedern gebildete Form ein positives Resultat ergeben muß. Das Gleiche erfolgt völlig eben so für den Sinus jeder Zahl, die kleiner als 1 ist, aus der Entwicklungsform der Sinus. Ist hingegen a größer als 1, so kann sie, weil $\frac{\pi}{2}$ zwischen 1 und 2 liegt, wenn b irgend ein nach Umständen zu bestimmender echter Bruch seyn soll, durch $\frac{1}{2}\pi - b$ ausgedrückt werden. Aber cos $(\frac{1}{2}\pi - b)$ ist, einer bekannten Regel zufolge: $\cos \frac{1}{2}\pi \cos b + \sin \frac{1}{2}\pi . \sin b = \sin b$ und dieses ein positiver echter Bruch, mithin auch cos a, in dem Falle, wo a zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, immer positiv. Daß endlich jede Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ einen besondren, von denen aller andern zwischen denselben Grenzen verschiedenen, Cosinus habe, ergibt sich auf folgende Art. Sey die eine Zahl a, die andre $a + b$, aber $a + b$ unter $\frac{1}{2}\pi$, so daß $\cos(a+b)$ ein bestimmter positiver echter Bruch seyn wird, wie es cos a, cos b, sin a, sin b, unter der anfänglichen Voraussetzung seyn müssen. Dann ist $\cos a \cos b$ kleiner als cos a; wird aber noch kleiner, wenn $\sin a \sin b$ davon abgezogen werden soll, und so beschaffen ist, daß dabey ein positiver Rest bleiben muß. Dies ist aber der Fall bey $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Folglich hat jederzeit die größer werdende Zahl zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ den kleineren Cosinus.

Besonders wichtig ist, insofern nicht allein die Cosinus sondern auch die Sinus aller Zahlen berechnet werden sollen, der vorhin gebrauchte Satz, daß $\cos(\frac{1}{2}\pi - b) = \sin b$ sey. Vermöge seiner ergeben sich für alle Zahlen, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, sobald ihre Cosinus ausgemittelt sind, die Sinus ganz von selbst. Der Sinus jeder solchen ist einerley mit dem Cosinus einer andern, die mit jener ersten $\frac{1}{2}\pi$ ausmacht. Vorausge-

setzt also, daß für alle Zahlen zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ die Cosinus berechnet sind, und nur für eine solche = b der Sinus angegeben werden soll, so liegt auch $\frac{1}{2}\pi - b$ zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$; man hat also schon $\cos(\frac{1}{2}\pi - b)$ und dieses ist identisch mit $\sin b$.

c. Sind die Werthe von $e^{a\sqrt{-1}}$ für jedes a zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ berechnet, so ergeben sich daraus die Werthe der nemlichen Größe, für alle sonstigen a, mittelbar ohne fernere Rechnung.

Die Rechnung lehrt, daß die kleinste Zahl a, für welche $e^{\pm a\sqrt{-1}}$ den Werth $\pm\sqrt{-1}$ annimt, $= \frac{1}{2}\pi$ sey, und daß, unter φ eine Zahl kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ verstanden, $e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}$ jederzeit einen bestimmten Werth, zusammengesetzt aus einem reellen Theile $\cos\varphi$, und einem imaginären $\sin\varphi\sqrt{-1}$ besitzt.

Ist φ verschieden von $\frac{1}{2}\pi$, so wird es, r als eine beliebige positive oder negative ganze Zahl gedacht, unter dem Schema $\frac{r\pi}{2}$ $\pm\varphi$ unfehlbar enthalten seyn.

Sollte nun $e^{\pm a\sqrt{-1}}$, alsdann $e^{\left(\frac{r\pi}{2}\pm\varphi\right)\sqrt{-1}}$ berechnet werden, so würde diese Größe als Product zweyer Factoren $e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}} \cdot e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}$ angesehn werden können. Der erste Factor aber, $e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}$ ist $e^{\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)r} = (\pm\sqrt{-1})^r$. Der zweyte Factor wird als ursprünglich berechnet angenommen.

$$\text{Mithin } e^{\left(\frac{r\pi}{2}\pm\varphi\right)\sqrt{-1}} = e^{\pm\varphi\sqrt{-1}} (\sqrt{-1})^r$$

Man hat also das Potenzensystem $e^{a\sqrt{-1}}$ für alle Werthe von a, sobald es nur für diejenigen, welche kleiner sind als $\frac{1}{2}\pi$, entwickelt ist.

Die obige Formel, woraus sich die Zulässigkeit dieser Behauptung sogleich ergibt, kann, für die in ihr enthaltenen Ex-

ponenzialgrößen den nach der Grundformel entwickelten Werth gesetzt, auch so ausgedrückt werden: $\cos\left(\frac{r\pi}{2}\pm\varphi\right)+\left[\sin\left(\frac{r\pi}{2}\pm\varphi\right)\right]\sqrt{-1}=[\cos\varphi\pm(\sin\varphi)\sqrt{-1}]\ (\pm\sqrt{-1})^r$. Es sind viele merkwürdige Beziehungen in derselben enthalten, von denen einige, für das Folgende besonders erhebliche, hier ihre Stelle finden mögen.

1. Der entwickelte Werth einer Exponenzialgröße von der Form $e^{a\sqrt{-1}}$, sobald a kein reines Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, muß allemal ein imaginärer Ausdruck von der Gestalt $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ seyn, so daß α sowohl als β nicht o, sondern reelle Zahlen sind. Denn es reducirt sich in diesem Falle auf $(\cos\varphi\pm(\sin\varphi)\sqrt{-1})(\pm\sqrt{-1})^r$, unter φ etwas Kleineres als $\frac{1}{2}\pi$, unter r jede beliebige ganze Zahl verstanden. $\cos\varphi$ sowohl als $\sin\varphi$ sind alsdann aber nie $=0$, und $(\pm\sqrt{-1})^r$ kann nie etwas Andres als $+1$, oder -1, oder $\pm\sqrt{-1}$ bedeuten. In jedem dieser Fälle nimt das Resultat die Form $(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$ an.

2. Ist $a=\frac{r\pi}{2}$, so wird die Exponenzialgröße $e^{a\sqrt{-1}}=e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}=(\pm\sqrt{-1})^r$. Sie kann alsdann, je nachdem die ganze Zahl r beschaffen ist, verschiedene Bedeutungen annehmen. Ist r von der Form 4m, unter m eine willkührliche ganze Zahl verstanden, so wird sie $e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}=e^{2m\pi\sqrt{-1}}=(\pm\sqrt{-1})^{4m}=+1$, ist r von der Form $4m+2$, so wird dieselbe $e^{(2m+1)\pi\sqrt{-1}}=(\pm\sqrt{-1})^{4m+2}=-1$, ist r von der Form $4m+1$, so ergibt sich $e^{(4m+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=(\pm\sqrt{-1})^{4m+1}=\pm\sqrt{-1}$; ist endlich r von der Form $4m+3$, so erhält man $e^{(4m+3)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=(\pm\sqrt{-1})^{4m+3}=\mp\sqrt{-1}$.

3. Der entwickelte Werth von $e^{\pm a\sqrt{-1}}$ kann also überhaupt nur folgende Gestalten haben. Entweder erst ist $+1$. Dies ist nur dann möglich, wenn (unter m eine beliebige ganze Zahl, positiv oder negativ, verstanden) $a = 2m\pi$. Oder er ist -1. Dies kann nur eintreten, wenn $a = (2m+1)\pi$. Oder er ist $\pm\sqrt{-1}$. Dies wird nur stattfinden, wenn $a = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ oder was damit der Form nach, (d. h. als allgemeines Schema der ungeraden Zahl) identisch ist, $(2m+3)\frac{\pi}{2}$. Oder endlich er erscheint (α und β als bestimmte reelle Zahlen gedacht) unter der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; wo aber α und β zwey echte Brüche seyn müssen, deren Quadrate zusammen 1 ausmachen. Dies kann also nur geschehn, wenn a kein reines Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, und muß alsdann, n 1 zufolge, jedesmal stattfinden.

Die einfachsten Potenzen von e also, deren berechnete Werthe $+1$; -1; oder $\pm\sqrt{-1}$ geben, sind: $e^0 = 1$; $e^{\pm\pi\sqrt{-1}} = -1$; $e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1}$.

4. Es gibt unzählig viele, dem Exponenten nach verschiedene Exponenzialgrößen, deren berechnete Werthe identisch ausfallen, aber die Exponenten derselben sind alsdann unter einem einfachen allgemeinen Schema enthalten. Sey allgemein der eine $\varphi\sqrt{-1}$, der andere $\psi\sqrt{-1}$. Soll $e^{\varphi\sqrt{-1}} = e^{\psi\sqrt{-1}}$ seyn, so muß $e^{\varphi\sqrt{-1}} : e^{\psi\sqrt{-1}}$ mithin $e^{(\varphi\sqrt{-1}) - (\psi\sqrt{-1})} = e^{(\varphi-\psi)\sqrt{-1}} = 1$, mithin $\varphi - \psi = 2m\pi$, also $\varphi = 2m\pi + \psi$ seyn; da es eben bewiesen worden, daß nur $e^{2m\pi\sqrt{-1}} = +1$ seyn könne. Und auf ähnliche Art gibt es unzählig viele Exponenzialgrößen, die der Größe nach gleiche, dem Zeichen nach widerstreitende Werthe haben. Soll $e^{\varphi\sqrt{-1}} = -e^{\psi\sqrt{-1}}$ seyn, so ist $e^{(\varphi-\psi)\sqrt{-1}} = -1$, also $\varphi - \psi$ nothwendig $= (2m+1)\pi$,

mithin $\varphi = (2m + 1)\pi + \psi$. Der einfachste Fall dieser Art tritt für $m = o$ ein, wo $e^{(\pi + \psi)\sqrt{-1}} = - e^{+\psi\sqrt{-1}}$ wird.

5. Es ist eine unmittelbare Folgerung aus dem letzten Satze, daß für jeden Werth von a, der unter 2π liegt, die Exponenzialgröße $e^{a\sqrt{-1}}$ einen eigenthümlichen Werth annehmen muß, anders ausfallend, so wie a sich ändert. Dabey besteht der Satz, daß nur für alle Werthe von a, die unter $\frac{1}{2}\pi$ sind, eine ursprüngliche Berechnung ihres Betrages nöthig ist. Bedeutet ψ etwas Kleineres als $\frac{1}{2}\pi$, so ist jeder Werth von a, der unter 2π liegt, entweder von der Form ψ, (dann ist $e^{\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi + (\sin\psi)\sqrt{-1}$, also ursprünglich) oder von der Form $\pi - \psi$, (dann ist $e^{(\pi-\psi)\sqrt{-1}} = e^{\pi\sqrt{-1}} \cdot e^{-\psi\sqrt{-1}} = -\cos\psi + (\sin\psi)\sqrt{-1}$ oder von der Form $\pi + \psi$, (alsdann ist $e^{(\pi+\psi)\sqrt{-1}} = -\cos\psi - (\sin\psi)\sqrt{-1}$ oder endlich von der Form $2\pi - \psi$; (dann ist $e^{(2\pi-\psi)\sqrt{-1}} = \cos\psi - (\sin\psi)\sqrt{-1}$ es kommt also in allen diesen Fällen bloß auf $\cos\psi$ und $\sin\psi$ an, deren Berechnung ursprünglich nachgewiesen ist.

III. Ueber die würklich berechneten Tafeln für das natürliche imaginäre Potenzensystem.

Nach den obigen Betrachtungen dürfen wir behaupten, daß eine Tabelle, worin die berechneten Werthe der Sinus und Cosinus für alle Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ anzutreffen sind, vollkommen hinlänglich seyn werde, um für jede beliebig angenommene Zahl, sie sey positiv oder negativ, ohne alle weitere Rechnung, den Sinus und Cosinus zu erhalten. Freylich gibt es solcher Zahlen unendlich viele, indessen wird es für allen Gebrauch hinlänglich seyn, wenn nur alle diejenigen, die sich um eine beliebig klein gewählte Größe von einander unterscheiden, zur Berechnung gezogen werden.

Wir besitzen in der That eine solche Tabelle, genau berechnet, und gehörig angeordnet, in großer Vollständigkeit, nur daß der geometrische Zweck, um dessentwillen sie verfertigt worden ist, ihr eine Einrichtung gegeben hat, welche in ge-

wissen Fällen einige kleine Modificationen erfordert, um sie für den gegenwärtigen analytischen brauchbar zu machen.

Es darf wohl als bekannt aus den Anfangsgründen der Trigonometrie angenommen werden, was für eine geometrische Bedeutung die Worte Sinus und Cosinus eines Winkels, oder des ihm zugehörigen Kreisbogens besitzen. Nun zeigt es sich bey den Untersuchungen über die Rectification des Kreises, daß, wenn man den Radius zur Einheit nimmt, und die Länge eines beliebigen Kreisbogens a nennt, die Gleichung zwischen dem Kreisbogen und seiner Sinuslinie $\sin a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; zwischen ihm und seiner Cosinuslinie $\cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$ ist. Zufällig also sind es gerade dieselben arithmetischen Formeln, auf welche wir vorhin bey der Betrachtung der Exponenzialgrößen mit imaginären Exponenten gerathen sind, die für die wesentlichsten Bedürfnisse der Trigonometrie berechnet werden mußten. Die Analysis kann sich dieses vortheilhaften Umstandes bedienen; sie mag allenfalls, um keine überflüssige Terminologie zu stiften, den Namen Sinus und Cosinus eine rein arithmetische Bedeutung unterlegen, welcher gemäß sie nichts anders als Zahl-Ausdrücke von bestimmter Gestalt bezeichnen; sie mag jene würklich aus diesen Zahl-Ausdrücken berechneten Tabellen gebrauchen, wie sie sich der logarithmischen bedient. Sie bekommt dadurch offenbar nichts mit der Geometrie und Trigonometrie zu thun, und ihre Reinheit leidet nicht durch Einmischung einer reellen Größenwissenschaft, welche in der That nie gestattet werden darf, wenn man nicht alle Ordnung der Begriffe verwirren, und die Folge zum Grunde machen will.

Es ist in unsern trigonometrischen Tafeln nur der eine Umstand für ihren arithmetischen Gebrauch wohl zu bemerken,

daß nicht der Kreisbogen selbst, der Länge nach durch den Radius als Einheit ausgedrückt, sondern statt dessen die Menge von Graden, Minuten und Secunden, welche er enthält, neben dem zugehörigen Sinus oder Cosinus steht. Man muß also, wenn man zu einer beliebigen Zahl a, in analytischer Bedeutung, durch Hülfe der Tafeln, den Sinus oder Cosinus haben will, erst berechnen, wie viel Grade u. s. w. ein Kreisbogen, dessen Länge, für den Radius 1, = a seyn soll, enthalten wird; welches vermöge der bekannten Regel durch die Formel $\frac{a}{2\pi}.360^\circ$ sogleich geschehn kann. Zu der dadurch gefundenen Zahl von Graden nehme man aus den Tafeln den Sinus oder den Cosinus, so hat man Sin a oder Cos a. Eben so, wenn umgekehrt zu einem bekannten Sinus oder Cosinus die zugehörige Zahl gesucht würde. Die Tafeln geben nur Grade u. s. w. für sie; man muß die Länge eines Kreisbogens alsdann noch berechnen, welcher, für den Radius 1, diese gefundenen Grade u. s. w. enthielte, und sie ist eigentlich die gesuchte Zahl. Fast in allen trigonometrischen Tafeln sind eigene Hülfstabellen vorhanden, um diese kleinen Rechnungen noch besonders zu erleichtern.

Wenn also die Aufgabe: für eine Exponenzialgröße von der Form $e^{a \cdot \sqrt{1}}$ den möglichst entwickelten hypothetischen Werth darzustellen, gelöst werden soll, so reduciren wir, sobald a größer seyn sollte als $\frac{1}{2}\pi$, durch leichte Division dasselbe auf die Form $r.\frac{1}{2}\pi \pm \varphi$, und brauchen alsdann vermöge des Satzes $e^{(r.\frac{1}{2}\pi \pm \varphi)\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^r\,[\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}]$ nur $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus den fertigen Tafeln zu nehmen (wobey denn erst für φ gesetzt werden muß $\frac{\varphi}{2\pi}.360^\circ$, sofern man die Tafeln aufschlagen will, um $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zu erhalten), um sofort den Werth dieses Ausdrucks $e^{(r.\frac{1}{2}\pi + \varphi)\sqrt{-1}}$ zu realisiren, welcher denn, jenachdem

r beschaffen ist, noch weiter vereinfacht werden kann. Ist a kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, so ergeben die Tafeln unmittelbar $e^{\pm a\sqrt{-1}} = \cos a \pm (\sin a)\sqrt{-1}$. Indessen dürfte der Fall selten vorkommen, wo $e^{a\sqrt{-1}}$ unmittelbar und ohne erleichternde Modification verlangt würde.

Wollte man endlich für irgend ein andres Potenzensystem, dessen Basis allgemein B wäre, jede Exponenzialgröße von der Form $B^{a\sqrt{-1}}$ berechnen, so würde, $B = e^b$ gesetzt, $B^{a\sqrt{-1}} = e^{ba\sqrt{-1}}$ und dadurch die Sache sogleich auf das natürliche Potenzensystem zurückkommen.

Dreyzehntes Kapitel.

Erweiterte numerische Logarithmenrechnung im natürlichen System nebst darauf gegründeter erweiterter Theorie des Rechnens mit Potenzen gebrochener Exponenten.

Beschränkte sich die Analysis bloß auf das reelle natürliche Potenzensystem, so würde die Logarithmenrechnung, wie auf ihrem elementarischen Standpuncte, lediglich für positive Zahlen anwendbar seyn, und also eigentlich nur ein particulärer Kunstgriff bleiben müssen. Erst nachdem sich die Idee des imaginären natürlichen Potenzensystems ausgebildet hat, und beyde Systeme sich gehörig verbinden, erweitern sich mit den Formen der Logarithmen, die Regeln ihres Gebrauchs, und die Resultate des durch ihre Hülfe geführten Calculs.

Die Entwicklung hat hier denselben Gang zu nehmen, wie in den Elementen. Man muß zuerst nachweisen, wie aus fertigen Tafeln für jede Zahl der Logarithme und umgekehrt, genommen werden kann, und hernach zeigen, wie durch die

bekannten Grundregeln der Logarithmenrechnung das ursprüngliche Rechnen vermittelt und erleichtert wird.

Von Erfindung der Regeln, oder Beweis ihrer Richtigkeit ist hier gar keine Rede. Für ein reelles Potenzensystem ist dieses Alles schon in der Elementar-Arithmetik abgethan, und so wie das imaginäre rein hypothetisch in seiner Entstehung und Ausbildung ist, werden alle Regeln der reellen Logarithmen auf die Formen des imaginären ohne Weiteres hypothetisch angewendet, als wenn nichts Unmögliches in den Andeutungen derselben enthalten wäre.

---

1. Zu jeder Zahl, sie sey reell oder aus einem reellen und einfachst imaginären Theile zusammengesetzt, den Logarithmen zu finden und umgekehrt.

Es ist schon früher bemerkt, daß in der Analysis unter Logarithmen schlechthin immer natürliche Logarithmen verstanden werden. Aber in Beziehung auch nur auf diese wird eine neue Unterscheidung wichtig. Wird eine Zahl als Potenz von e betrachtet, und der Exponent derselben angegeben, so soll dieser Exponent, d. h. der Logarithme jener Zahl, sofern er unmittelbar, ohne weitere Modification, aus dem natürlichen Systeme, (es sey das reelle, oder, falls dies nicht ausreicht, das imaginäre, oder theils das eine theils das andre) abgenommen werden kann, der Fundamentallogarithme der Zahl heißen. Sollte es sich weiterhin zeigen, daß für eine Zahl, welche als Potenz von e angesehn werden soll, außer jenem ersten Exponenten noch andre möglich sind, und sollte ein allgemeiner Ausdruck erhalten werden können, aus welchem als terminus generalis, alle die verschiedenen Werthe, die dem verlangten Exponenten beygelegt werden dürften, durch Specialisirung abgeleitet werden könnten, so daß jener Fundamentallogarithme als Anfangsglied dieser Reihe von Werthen erschiene, so soll der genannte allgemeine Ausdruck mit dem

Namen des generellen Logarithmen der vorgegebenen Zahl belegt werden. In der nächsten Darstellung mag das Zeichen log, den fundamentalen, das Zeichen $\overline{\log}$ den generellen Logarithmen andeuten.

A. Für jede Zahl den Fundamentallogarithmen zu finden.

a. Ist die Zahl α positiv, so ergibt das reelle natürliche System sogleich $\alpha = e^a$. Hier ist a, der einzige reelle Logarithme den α haben kann, augenscheinlich der fundamentale, weil er ohne Weiteres aus dem reellen Potenzensystem hervortritt.

b. Ist die Zahl α negativ, so kann sie im reellen natürlichen System keinen Logarithmen haben. Denn es ist bereits bemerkt, daß e^a für jedes positive a, aus der Grundreihe $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots$ berechnet, stets etwas Positives geben muß; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ also gleichfalls, daß also kein reeller Werth von a, als Exponent einer Potenz von e betrachtet, für e^a einen negativen Werth bringen kann. Es ist aber aus den Untersuchungen über das einfachste imaginäre Potenzensystem bekannt, daß es allerdings Potenzen gibt, deren berechnete Werthe etwas Negatives, namentlich -1 betragen, und daß die einfachste von diesen $e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ ist. Offenbar also, wenn $e^a = \alpha$, und $e^{\pm\pi\sqrt{-1}} = -1$, wird $e^{a\pm\pi\sqrt{-1}} = -\alpha$, mithin $\log(-\alpha) = a \pm \pi\sqrt{-1} = \log(+\alpha) \pm \pi\sqrt{-1}$ seyn. Allerdings also hat jede reelle, negative Zahl einen Fundamentallogarithmen, der aber nur durch Verbindung des reellen und imaginären Potenzensystems erhalten werden kann.

c. Ist die Zahl rein imaginär von der einfachsten Form, $\alpha\sqrt{-1}$, so gibt das berechnete imaginäre Potenzensystem in Verbindung mit dem reellen sofort ihren Fundamentallogarithmen. Sey aus dem reellen System $e^a = \alpha$; der einfachste Ausdruck für $\pm\sqrt{-1}$, ist aus dem imaginären System

$e^{\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}$; es wird also $\log(\alpha\sqrt{-1}) = a^{\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}$ $= \log\alpha \pm \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$.

d. Ist die Zahl ein **partiell imaginärer Ausdruck** der einfachsten Form $= \alpha + \beta\sqrt{-1}$, so erhält man ihren Fundamentallogarithmen durch nachstehende Betrachtung.

Ein Ausdruck von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ soll ein **logarithmisch enwickelter** heißen, wenn er eine solche Gestalt hat daß er, als unmittelbar aus dem natürlichen Potenzensystem hervorgetreten, und als Potenz aus einem bekannten, in seiner Art einfachsten Exponenten entstanden, ohne weitere Rechnung sofort nachgewiesen werden kann.

Dieser Fall tritt freywillig ein, wenn $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$ seyn sollte. Alsdann ist $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}$. Der letzte Ausdruck aber ist ein logarithmisch entwickelter, da er den Werth von $e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}$ darstellt, mithin ohne alle Rechnung $\log(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}) = \pm\varphi\sqrt{-1}$ seyn, wird.

Ein solcher Fall dürfte von selbst sehr selten vorkommen, indessen wird jeder andere auf ihn reducirt werden müssen, da ursprünglich nur imaginäre Ausdrücke von der Form $\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}$ aus dem wirklich berechneten imaginären Potenzensystem hervortreten.

Sollte ein imaginärer Ausdruck $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ unter der Form $A(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ erscheinen, A als einen reellen Factor angenommen, so würde dieser nicht hindern, das Ganze $A(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ den logarithmisch entwickelten Ausdruck von $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ zu nennen. Denn $\log A$ geben die Tafeln ohne Rechnung sogleich; $\log(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ ist $\pm\varphi\sqrt{-1}$. Ist also $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = A(\cos\varphi \pm (\sin\varphi\sqrt{-1})$ so hat man sofort: $\log(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \log A \pm \varphi\sqrt{-1}$.

Ist es also möglich, jeden imaginären Ausdruck von der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = A(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ zu setzen,

so daß aus α und β bestimmte Werthe für A und φ abgeleitet werden, so wird man auch für $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, durch Hülfe seines logarithmisch entwickelten Ausdrucks $A(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$, den Logarithmen sofort anzugeben im Stande seyn.

Zu dieser Absicht muß unfehlbar $\alpha = A\cos\varphi$, und $\beta = A.\sin\varphi$ gesetzt werden. Daraus ergibt sich, quadrirt und durch Addition verbunden $\alpha^2 + \beta^2 = A^2 \cos\varphi^2 + A^2 \sin\varphi^2 = A^2$, also $A = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$. Setzt man diesen Werth von A in die anfänglichen Gleichungen zurück, so geben sie $\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$. Der eine dieser Sätze ist eine nothwendige Folge des andern. Es lassen sich also aus α und β jedesmal A und φ so bestimmen, daß wirklich $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = A.(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ gesetzt werden kann.

Durch eine besondere Einrichtung derselben Tafeln, vermöge deren für jeden Werth von φ, sowohl $\cos\varphi$ als $\sin\varphi$ sogleich angegeben werden können, läßt sich ein solches Resultat aber noch kürzer erhalten. Nicht allein enthalten nemlich diese Tafeln für jedes φ, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, den Sinus und Cosinus, sondern in einer dritten Columne auch den berechneten Werth des Quotienten $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ unter der Benennung Tangente der Zahl φ, $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Alle echten Brüche sowohl als alle ganzen Zahlen und unechten Brüche erscheinen in dieser dritten Columne, soweit es der Zweck einer wirklichen Rechnung erfordern mag, so daß für jede von ihnen diejenige, deren Tangente sie ist, sogleich aus den Tafeln abgenommen werden kann. Sollte eine negative Zahl gegeben seyn, um als Tangente einer andern betrachtet zu werden, und beabsichtigte man diese andere durch Hülfe der Ta-

feln zu finden, so wäre, der Definition gemäß, tang $(-\varphi)$ $= \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\tang\varphi$. Es verhält sich also mit den Tangenten in Absicht auf positive und negative Zahlen gerade wie mit den Cosinus.

Dies vorausgesetzt, können, um A und φ zu finden, die beyden Sätze $A\cos\varphi = \alpha$ und $A\sin\varphi = \beta$ sofort durch Division combinirt werden, woraus $\frac{\beta}{\alpha} = \tang\varphi$ erfolgt, wodurch sich sogleich φ bestimmt. Alsdann hat man zugleich auch $\cos\varphi$, und dadurch zufolge des ersten Satzes $\frac{\alpha}{\cos\varphi} = A$.

Es wird also die gewünschte Regel folgendermaaßen lauten.

Um $\log(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$ zu finden, berechne man $\frac{\beta}{\alpha}$, setze es $= \tang\varphi$, finde dadurch aus den Tafeln, welche für jede Zahl, die als $\tang\varphi$ angenommen ist, das zugehörige φ enthalten, φ sowohl, als rückwärts $\cos\varphi$. Alsdann wird $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \alpha(1 \pm (\tang\varphi)\sqrt{-1}) = \frac{\alpha}{\cos\varphi}(\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ gesetzt werden dürfen, und aus diesem logarithmisch entwickelten Werthe folgt sogleich $\log(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm \varphi\sqrt{-1}$.

Auf jeden Fall also, die Zahl mag reell, rein oder partiell imaginär seyn, ist das allgemeine Schema ihres Fundamentallogarithmen, unter a und b reelle Zahlwerthe oder selbst einzeln o gedacht, $a + b\sqrt{-1}$.

B. Für jede Zahl den generellen natürlichen Logarithmen zu erhalten.

Setzen wir die Zahl, deren natürlicher Fundamentallogarithme bekannt ist, allgemein N, jenen Logarithmen selbst n, so daß $N = e^n$. Frägt man, ob es nicht noch andre Werthe

des Exponenten a geben kann, die das Gleiche leisten, so ist klar, daß jeder solcher Werth durch $n+p$ bezeichnet werden darf, daß also, ob nicht allein $N=e^n$, sondern auch $N=e^{n+p}$ gesetzt werden könne, und wie p zu solcher Absicht beschaffen seyn müsse, erforscht werden soll. Ist $e^{n+p}=e^n$; so muß durchaus $e^p=1$ seyn. Im reellen Potenzensystem gibt es für p keinen andern Werth als o, im einfachsten imaginären keinen andern als $2m\pi\sqrt{-1}$, wo unter m jede positive oder negative ganze Zahl verstanden werden darf. Es ist also $n+2m\pi\sqrt{-1}$ das allgemeine Schema aller Exponenten, deren berechnete Potenzen dem Werthe nach zusammenfallen, welche Regel in der Kunstsprache so lautet. Hat man von irgend einer Zahl, sie sey positiv, negativ, oder aus einem reellen und imaginären Gliede der einfachsten Art zusammengesetzt, den Fundamentallogarithmen, so wird er durch den Zusatz $2m\pi\sqrt{-1}$ in ihren generellen Logarithmen verwandelt: $\overline{\log.}\ N=\log N+2m\pi\sqrt{-1}$.

C. Zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden.

Zuvörderst untersuche man, ob der gegebene Logarithme fundamental, oder generell, oder etwa, verschieden von dem fundamentalen, einer von den folgenden Particulärwerthen ist, welche aus dem generellen abgeleitet werden können. Um generell zu seyn, muß er ein unbestimmtes, um ein nachfolgender particulärer zu seyn, ein bestimmtes $2m\pi\sqrt{-1}$ als Theil in sich schließen, und nur wenn er entweder nichts Imaginäres, oder nur ein solches, dessen reeller Factor kleiner als 2π ist, als Theil enthält, ist er ein fundamentaler.

Ist der gegebene Logarithme nicht fundamental, d. h. führt er als Theil seines Ausdrucks bestimmt oder unbestimmt $2m\pi\sqrt{-1}$ bey sich, so kann man dieses, bey Wiederherstellung der ihm zugehörigen Zahl gänzlich vernachlässigen. Denn $e^{a+2m\pi\sqrt{-1}}=e^a.e^{2m\pi\sqrt{-1}}=e^a$. Es braucht also nur von Fundamentallogarithmen die Rede zu seyn.

Ist ein solcher bloß reell $= a$, so gibt sogleich das reelle System den Werth von e^a, d. h. die ihm zugehörige Zahl.

Ist er rein imaginär $\pm a\sqrt{-1}$, so findet sich sofort aus dem rein imaginären Systeme $e^{\pm a\sqrt{-1}} = \cos a \pm (\sin a)\sqrt{-1}$.

Ist er partiell imaginär von der Form $(a \pm b\sqrt{-1})$, so ist die ihm zugehörige Zahl ein Product aus zwey Factoren $e^a \cdot e^{\pm b\sqrt{-1}} = e^a \cdot (\cos b \pm (\sin b)\sqrt{-1})$; der erste ergibt sich aus dem reellen, der zweyte aus dem imaginären System. Es verdient hier besonders bemerkt zu werden, daß falls $b = \pi$ seyn sollte, (weil alsdann $\sin b = o$, $\cos b = -1$ wird) $e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a . e^{b\sqrt{-1}} = -e^a$ seyn würde; wenn $b = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ wäre, (wobey $\sin b = +1$ oder -1, $\cos b = o$ ist) $e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a . e^{b\sqrt{-1}} = \pm e^a \sqrt{-1}$ seyn würde. In beyden Fällen braucht man, um für den Logarithmen $a + b\sqrt{-1}$ die zugehörige Zahl zu finden, bloß e^a aus den Tafeln des reellen Systems. In allen übrigen aber müssen sich zu solcher Absicht die Tafeln beyder Systeme vereinigen.

II. Die Fundamental-Regeln der numerischen Logarithmen-Rechnung.

Da wir durch das Vorangegangene im Stande sind, nicht allein positive, sondern auch negative und imaginäre Zahlen-Ausdrücke als Potenzen im natürlichen System zu betrachten, und ihre Logarithmen anzugeben, so steht nichts im Wege, die Grundregeln der Logarithmenrechnung für alle diese Formen in Thätigkeit zu setzen.

A. Multiplication.

Dabey wird es gegenwärtig auf folgende Fälle ankommen, unter der Voraussetzung, welche völlig genügt, daß nur von zwey Factoren die Rede seyn soll.

1. Die Factoren sind reelle Zahlen.

Entweder sind sie beyde positiv. Alsdann bleibt es bey der gewöhnlichen Regel. Ist $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$, so ist $\alpha\beta = e^{a+b}$. Die Tafeln des reellen Systems geben unmittelbar a und b, die Logarithmen der Factoren; ihre Summe $a + b$ ist also der des Products, und zu diesem geben die Tafeln rückwärts den Werth von e^{a+b}, das heißt das Product $\alpha.\beta$ selbst.

Oder die Factoren führen verschiedene Zeichen $\alpha.(-\beta)$. Ist, wie vorhin $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$, so wird $-\beta = e^{b \pm \pi\sqrt{-1}}$, mithin $\alpha(-\beta) = e^{a+b\pm\pi\sqrt{-1}} = e^{a+b}.e^{\pm\pi\sqrt{-1}} = \alpha.\beta.(-1) = -\alpha.\beta$ seyn. Auch hier also geben die Logarithmen der Factoren a, und $b\pm\pi\sqrt{-1}$, zusammenaddirt, den des Products, und daraus ergibt sich, die Tafeln des reellen Systems zugezogen, das Product, sowohl der Größe als dem Zeichen nach.

Oder endlich beyde Factoren sind negativ $(-\alpha)(-\beta)$. Ist auch hier $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$, so wird $-\alpha = e^{a\pm\pi\sqrt{-1}}$, $-\beta = e^{b\pm\pi\sqrt{-1}}$, mithin $(-\alpha).(-\beta) = e^{a+b\pm(\pi\pm\pi)\sqrt{-1}}$ $= e^{a+b}.e^{\pm(\pi\pm\pi)\sqrt{-1}}$. Nun aber ist $\pm(\pi\pm\pi)\sqrt{-1}$ entweder o, oder $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; in beyden Fällen ist $e^{\pm(\pi\pm\pi)\sqrt{-1}} = 1$. Es ist also $(-\alpha).(-\beta) = +\alpha.\beta$ und auch hier gilt unbedingt die Regel, daß die Logarithmen der Factoren zusammenaddirt den des Products bringen, und aus dem letzteren durch Hülfe der Tafeln das Product selbst abgeleitet werden kann.

2. Die Factoren sind, einer oder beyde, imaginäre Formen der einfachsten Art. Hier sind folgende Fälle ferner zu unterscheiden.

α. Entweder der eine Factor reell, der andere rein imaginär $\alpha.(\beta\sqrt{-1})$. Alsdann ist, wenn $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$, $\log\alpha = a$, $\log(\beta\sqrt{-1}) = \log\beta + \log\sqrt{-1} = b + \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$ also

der Logarithme des Products $= a + b + \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$. Mithin das Product $e^{a+b+\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = e^{a+b} e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = (\alpha . \beta)\sqrt{-1}$

β. Oder beyde Factoren rein imaginär $(\alpha\sqrt{-1})(\beta\sqrt{-1})$. Alsdann ist der erste $e^{a+\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}$, der andere $e^{b+\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}$, mithin das Product $e^{a+b+\pi\sqrt{-1}} = e^{a+b} e^{\pi\sqrt{-1}} = (\alpha . \beta(-1))$. Es gibt also die Logarithmen Rechnung $(\alpha\sqrt{-1})(\beta\sqrt{-1}) = -\alpha . \beta$.

γ. Oder beyde Factoren sind partiell imaginär, $(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1})$. Um die Logarithmen der Factoren $(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ $(\gamma + \delta\sqrt{-1})$ zu erhalten, hat man sie zuvörderst logarithmisch zu entwickeln.

Ist $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}\,\varphi$, $\frac{\delta}{\gamma} = \text{tang}\,\psi$, so wird

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)(\cos\varphi + (\sin\varphi)\sqrt{-1})$$

$$\gamma + \delta\sqrt{-1} = \left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right)(\cos\psi + (\sin\psi)\sqrt{-1})$$

mithin $\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) + \varphi\sqrt{-1}$

$$\log(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right) + \psi\sqrt{-1}$$

also der Logarithme des Products:

$$\log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) + \log\left(\frac{\beta}{\cos\psi}\right) + (\varphi + \psi)\sqrt{-1}$$

Folglich das Product selbst:

$$\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) . \left(\frac{\beta}{\cos\psi}\right)(\cos(\varphi + \psi) + (\sin(\varphi + \psi))\sqrt{-1}$$

Dies gibt den merkwürdigen Lehrsatz: das Product zweyer logarithmisch entwickelter partiell imaginären Ausdrücke wird ein ähnlicher. Sein erster reeller Factor ist ein Product aus den ihrigen; sein zweyter partiell imaginärer Factor enthält Sinus und Cosinus einer Zahl, welche die Summe von denen ist, deren Sinus und Cosinus in den Ausdrücken der sich multiplicirenden Größen auftreten.

Dieser Satz gilt offenbar nicht bloß von zwey, sondern jeder beliebigen Menge sich multiplicirender Ausdrücke solcher Art.

Augenscheinlich schafft der Gebrauch der Logarithmen also bey Multiplicationen partiell imaginärer Factoren wesentliche Abkürzung. Nothwendig ist er indessen zur Erhaltung des Resultats nicht. Das Product der Formen $(\alpha + \beta \sqrt{-1})$ $(\gamma + \delta \sqrt{-1})$ würde unmittelbar berechnet, und Gleichartiges zusammengefaßt, $(\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}$ werden, und auf ähnliche Art ließe sich für jede Anzahl solcher Factoren das Product geradezu angeben, so daß es, nach einer leichten combinatorischen Regel, aus den Gliedern der Factoren gebildet, unter der Gestalt $A + B\sqrt{-1}$ erscheinen müßte, wenn Gleichartiges in seinem Ausdruck vereinigt würde.

Der Fall wo der eine Factor eines gesuchten Products reell, der andere partiell imaginär ist, bedarf keiner besondern Betrachtung.

Es würde bey allen eben dargestellten Fällen der Multiplication, sofern man aus den Logarithmen der Factoren den des Products, und aus diesem das Product selbst erhalten will, ganz überflüssig seyn, sich zu generellen Logarithmen zu erheben. Denn seyen allgemein die Factoren, A und B, ihre Fundamentallogarithmen a und b, so würde nach der Theorie dieser Formen

$$\overline{\log} A = a + 2m\pi\sqrt{-1}$$
$$\overline{\log} B = b + 2r\pi\sqrt{-1}$$

$$\overline{\log} A + \overline{\log} B = a + b + 2(m+r)\pi\sqrt{-1} = \overline{\log}(A.B)$$

Rückwärts also $A.B = e^{a+b+2(m+r)\pi\sqrt{-1}} = e^{a+b}$ $e^{2(m+r)\pi\sqrt{-1}} = e^{a+b}$ seyn. Man würde also bloß

aus den Tafeln den berechneten Werth der Potenz, welcher $a+b$ zum Exponenten dient, d. h. man würde bloß zu dem Fundamentallogarithmen des Products in den Tafeln die zugehörige Zahl aufzusuchen haben, und der Theil des Ausdrucks, wodurch der fundamentale Logarithme zum generellen erhoben wird, würde hier wie allenthalben, wo es darauf ankommt, durch Hülfe des berechneten Potenzensystems vom gegebenen Logarithmen zu der ihm angehörigen Zahl zurückzukehren, ganz außer Acht gelassen werden müssen.

B. Division.

Wenn für die Multiplication mit reellen Zahlen sowohl als imaginären Ausdrücken der einfachsten Art, die Möglichkeit und Regel, um jedesmal aus den Logarithmen der Factoren den des Products, und aus diesem rückwärts das gesuchte Product zu erhalten, nachgewiesen worden ist, so versteht es sich von selbst, daß für Divisionen an und mit Ausdrücken der gleichen Art, dieselben Regeln, nur in umgekehrter Beziehung und Kunstsprache, gelten.

Man wird also jedesmal vom Fundamentallogarithmen des Dividend, den des Divisors abziehn, der Rest wird von selbst die Form eines Fundamentallogarithmen haben, man wird mithin die ihm zugehörige Zahl durch die fertigen Tafeln des reellen und imaginären Systems ohne weitere Rechnung finden können.

Doch mag die Regel für den wichtigsten Fall hier ausdrücklich ausgesprochen werden.

Um $\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$ zu berechnen, drücke man Dividend und Divisor beyde in logarithmisch entwickelter Gestalt aus. Man setze also $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tang}\varphi$, und $\frac{\delta}{\gamma} = \operatorname{tang}\psi$, so wird:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{\alpha}{\cos\varphi}\,(\cos\varphi + (\sin\varphi)\sqrt{-1})$$

mithin ist $\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \log\frac{\alpha}{\cos\varphi} + \varphi\sqrt{-1}$.

Ebenso $(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \frac{\gamma}{\cos\psi}(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$;

folglich $\log(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \log\frac{\gamma}{\cos\psi} + \psi\sqrt{-1}$.

Mithin vom Logarithmen des Dividend den des Divisors subtrahirt, der des Quotienten

$$\log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) - \log\left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right) + (\varphi - \psi)\sqrt{-1}$$

Mithin der Quotient selbst

$$\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) : \left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right) . [\cos(\varphi - \psi) + [\sin(\varphi - \psi)] (\sqrt{1})].$$

Der Quotient zweyer logarithmisch entwickelter Ausdrücke wird erhalten, wenn man den einfachen Factor des einen durch den des andern dividirt, diesem Quotienten aber einen partiell imaginären Factor beygibt, in dem die Zahl, deren Sinus und Cosinus sie enthält, sich aus der Differenz der Zahlen bildet, deren Sinus und Cosinus in den Ausdrücken des Dividend und Divisor vorkommen.

Auch hier würde ein ursprüngliches Dividiren allerdings gestattet seyn; und $\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \left(\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\right)\sqrt{-1}$ für den Quotienten darbieten.

Uebrigens darf auch bey der Division, aus denselben Gründen, wie bey der Multiplication behauptet werden, daß Fundamentallogarithmen zur Berechnung des Quotienten völlig genügen, und der Gebrauch genereller zu dieser Absicht ganz überflüssig seyn würde.

C. Potenziirung, den Exponenten als ganze positive oder negative Zahl gedacht.

Auch hier ist es leicht zu zeigen, daß, die zu potenziirende Zahl mag seyn, welche sie will, die bekannte Regel, man

solle ihren Logarithmen mit dem Grade der verlangten Potenz multipliciren, und dies Product als einen neuen Logarithmen ansehn, und zu ihm rückwärts die zugehörige Zahl finden, durchaus anwendbar ist.

Wenn die zu potenzirende Zahl positiv ist, so tritt ohne Weiteres die Regel in Kraft: ihr Fundamentallogarithme ergibt sich sogleich aus dem reellen System.

Ist sie negativ, $-\alpha$, so wird, falls $\alpha = e^a$, ihr Fundamentallogarithme $a + \pi \sqrt{-1}$, mithin $[-(e^a)]^n = e^{(a+\pi\sqrt{-1})n} = e^{na} . e^{n\pi\sqrt{-1}}$, welches, da $e^{n\pi\sqrt{-1}} = (-1)^n$ offenbar $e^{na} . (-1)^n$ gibt. Ist also $e^{na} = A$, so erhält man, zu dem Logarithmen des Gesuchten die zugehörige Zahl nehmend, $(-\alpha)^n = A . (-1)^n$.

Ist das zu Potenziirende einfach imaginär, $\beta\sqrt{-1}$, so wird $\log(\beta\sqrt{-1}) = \log\beta \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, folglich $\log[(\beta\sqrt{-1})^n] = n\log\beta \pm \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}$. Mithin weil $e^{\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^n$; die diesem Logarithmen zugehörige Zahl $\beta^n . (\sqrt{-1})^n$.

Es zeigt sich in diesen Fällen offenbar das Zusammentreffen der Logarithmenrechnung mit anderweitig bekannten Resultaten.

Ist endlich die Zahl, welche potenziirt werden soll, partiell imaginär, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, so entwickle man sie logarithmisch, wo also, $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, ihr Logarithme $\log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm . \varphi\sqrt{-1}$ seyn wird. Mithin ist für die nte Potenz der nemlichen Zahl der Logarithme $n\log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm n\varphi\sqrt{-1}$. Die diesem Logarithmen zugehörige Zahl, selbst logarithmisch entwickelt, ist alsdann $\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)^n \cos(n\varphi \pm (\sin n\varphi)\sqrt{-1})$; wo

wiederum der Satz, daß bey Potenziirungen logarithmisch ent-wickelter Formen, wie $\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)[\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}]^n$ das Resultat die ganz verwandte Gestalt $\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)^n \cdot (\cos n\varphi \pm (\sin n\varphi)\sqrt{-1})$ besitzt, und die einfachste Regel, wonach, aus dem zweyten Factor der Wurzel, der correspondirende ihrer verlangten Potenz abgeleitet wird, daß nemlich $(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm (\sin n\varphi)\sqrt{-1}$ besondere Bemerkung verdient.

Ein unmittelbares Potenziiren der Form $(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$ durch den binomischen Lehrsatz ließe sich, obschon mit Weitläuftigkeit, vollziehn, und würde, wenn man alle paaren Glieder des Resultats in einen, alle unpaaren für sich in einen zweyten Inbegriff faßte, dieses unter der Form $A \pm B\sqrt{-1}$ erscheinen lassen.

Auch bey allen diesen Potenziirungen würde der Gebrauch genereller Logarithmen völlig überflüssig seyn, indem am Ende, wenn man zu dem gefundenen Logarithmen des Resultats dieses selbst aus den Tafeln erhalten wollte, der generalisirende Theil des Logarithmen weggelassen, und nur der fundamentale behalten werden müßte. War dem Fundamentallogarithmen, ihn zu generalisiren, $2m\pi\sqrt{-1}$ zugesetzt, so wäre by der Multiplication mit dem Grade der verlangten Potenz, im Logarithmen des Gesuchten noch $2mn\pi\sqrt{-1}$, hinzugekommen, welcher generalisirende Zusatz als nicht vorhanden anzusehn ist, wenn das Gesuchte aus seinem Logarithmen dargestellt werden soll, da er nur den Factor $e^{2mn\pi\sqrt{-1}} = 1$ in den Ausdruck des Gesuchten bringt.

D. Wurzelausziehung.

Bey allen bisherigen Operationen war die Hülfe, welche der Gebrauch von Logarithmen gewährt, nur Abkürzung des Rechnens, und man hätte, auch ohne sie, das gewünschte

Resultat erhalten können. Aber bey den Wurzelausziehungen treten sie, auf eine tiefer greifende Weise, und als unentbehrlich zur Begründung eines allgemeinen Verfahrens, in die Arithmetik ein.

1. Um diesen wichtigen Gegenstand gründlich, und dabey möglichst kurz zu behandeln, ist es zweckmäßig, von dem einfachsten Falle auszugehn, der bey Wurzelausziehungen vorkommen kann, demjenigen also, wo die Wurzel eines beliebigen Grades aus 1 gezogen werden soll.

Hier würde der Gebrauch der Fundamentallogarithmen nicht weit führen. Für 1 ist ein solcher in jedem System o, man würde also bloß $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^o} = e^o = 1$ erhalten.

Aber es ist einer der ersten Sätze in der Theorie des einfachsten imaginären Potenzensystems, daß es unzählig viele Potenzen von e gibt, deren Werth $= 1$ ist, daß sie jedoch alle unter dem Schema $e^{2m\pi\sqrt{-1}}$ enthalten sind, so daß m nach Belieben jede positive oder negative ganze Zahl seyn darf. So ist also, in Gemäßheit der bekannten Elementarregel, daß Wurzelausziehung an einer Potenz durch Division ihres Exponenten mit dem Grade der verlangten Wurzel vollzogen werde $e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}}$ das allgemeine Schema dessen, was $\sqrt[n]{1}$ bedeuten kann, in welchem Ausdrucke für m jede positive oder negative ganze Zahl gesetzt werden darf.

Diese Form aber ergibt für das Gesuchte mehrere verschiedene Werthe, und zwar nothwendig nicht mehr oder weniger als die Zahl n, das heißt der Grad der auszuziehenden Wurzel, Einheiten in sich schließt.

Denn man beabsichtige zuerst, für m alle positive Zahlen ins Unendliche zu setzen, so ist früher bewiesen, daß Ausdrücke wie $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ und $e^{\psi\sqrt{-1}}$ nur dann identisch seyn können, wenn φ und ψ um irgend ein Vielfaches von 2π verschieden

sind. So lange man aber in dem gegenwärtigen $e^{\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{n}}$ für m ganze Zahlen setzt, kleiner als n, ist $\frac{2m\pi}{n}$ kleiner als 2π; zwey Werthe dieser Größe, deren jeder kleiner ist als 2π, können aber nicht um ein Vielfaches von 2π verschieden seyn, mithin auch die beyden Potenzen von e, denen sie zu Exponenten dienen, nicht gleiche Werthe erhalten.

Dabey darf man von diesen Werthen behaupten, daß allemal die beyden, welche von Anfang und Ende der Reihe, welche sie bilden, falls für m die ganzen Zahlen nach natürlicher Ordnung gesetzt sind, um sie successiv zu erhalten, gleichweit abstehn, sich nicht in Absicht auf die Größe der Theile, woraus sie bestehn, sondern bloß in Absicht auf das Zeichen der zweyten Theils, den sie enthalten, von einander unterscheiden. Der hte vom Anfang ist

$\left(\cos\frac{2h\pi}{n}+\sin\frac{2h\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$; der hte vom Ende, d. h. der n−hte vom Anfang

$\left[\cos 2\frac{(n-h)\pi}{n}+\left(\sin\frac{[2.(n-h)\pi]}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$ Nun aber ist

$\cos\left[\frac{2(n-h)\pi}{n}\right]=\cos\left(2\pi-\frac{2h\pi}{n}\right)=\cos\frac{2h\pi}{n}$;

$\sin\left(\frac{2(n-h)\pi}{n}\right)=-\sin\frac{2h\pi}{n}$, mithin der letzte Ausdruck $=\left(\cos\frac{2h\pi}{n}-\sin\frac{2h\pi}{n}.\sqrt{-1}\right)$. Man braucht also, wenn es auf würkliche individuelle Berechnung eines solchen Ausdrucks ankommt, nur, wenn n paar, die ersten $\frac{n}{2}$; wenn n unpaar, die ersten $\frac{n+1}{2}$ der verschiedenen nachfolgenden Werthe die er in sich faßt, unmittelbar abzuleiten. Ist n von paarer Zahl, so wird der mittelste unter den übrigen, den an-

fänglichen (für $h = o$, welcher $+1$ ist) nicht mitgezählt, $= -1$, alle andern aber partiell imaginär. Ist n unpaar, so ist der anfängliche für $h = o$, selbst $= +1$, alle andern werden partiell imaginär.

Und dadurch übersieht man zugleich, daß auch für den Fall, wo man in der Form $e^{\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{n}}$ für m negative Zahlen setzen wollte, aus ihr nur Wiederholungen der Werthe entstehn würden, die man für positive m bekommt. Ist $e^{+\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}} = \cos\frac{2m}{n}\pi + \left(\sin\frac{2m}{n}\pi\right)\sqrt{-1}$, so wird, $m = -h$ gesetzt, da bekanntlich $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, jener Ausdruck in $\cos\frac{2h\pi}{n} - \left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$ verwandelt. Dieses aber ist einer von denen, die man m positiv nehmend, aus $e^{\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{n}}$ schon entwickelt hat.

In dem letzten Satze liegt zugleich der Beweis für die Behauptung, daß $\sqrt[n]{(1)^1} = \sqrt[n]{(1)^{-1}}$, oder $1^{+\frac{1}{n}} = 1^{-\frac{1}{n}}$ auch insofern von der Vieldeutigkeit dieser Ausdrücke die Rede ist.

Setzt man also für m alle ganze Zahlen von o inclusive, bis n exclusive, so erhält man ebenso viele verschiedene Werthe für $e^{\frac{2m}{n}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{-1}$, und dieses sind die einzigen dieser Art. Wollte man für m etwas Größeres als n nehmen, also h als beliebige ganze Zahl, p als geringer wie n gedacht, $m = hn + p$ setzen, so erhielte man $e^{\frac{2(hn+p)\pi\sqrt{-1}}{n}} = e^{2h\pi\sqrt{-1}} \cdot e^{\frac{2p\pi\sqrt{-1}}{n}}$, d. h. einen von denen, die schon früher hervorgetreten waren, als man für m kleinere Zahlen wie n substituirte.

Es ist also Factum des Calculs, aus seinen Regeln selbst hervortretend, daß $\sqrt[n]{1}$ nicht mehr oder weniger als n verschiedene Werthe hat. Der einfachste davon, welcher auch hier der fundamentale heißen könnte, für m = o, ist 1. Der Inbegriff aller jener Werthe, der generelle für $\sqrt[n]{1}$, ist $e^{\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{n}}$, vorausgesetzt, daß für m alle ganze Zahlen, von o bis an n, gesetzt werden. Will man den Ausdruck des generellen Werths entwickeln, so wird $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2m}{n}\pi + (\sin\frac{2m}{n}\pi)\sqrt{-1}$, und fertige Tafeln dienen jedesmal diese Form ohne Rechnung zu realisiren.

Hier war also in der That der erste Fall vorhanden, wo das Rechnen an einer Zahl, sofern es durch Hülfe des Potenzensystemes vollführt werden sollte, nicht bloß den fundamentalen, sondern den generellen Logarithmen derselben in Anspruch zu nehmen hatte. Aber es ist, wie sich im Verlauf der Untersuchung ergeben wird, selbst für die Wurzelausziehung der einzige dieser Art, und wenn an irgend einer andern Zahl als 1 die Operation ausgeübt werden soll, so kann man immer mit dem Fundamentallogarithmen derselben völlig ausreichen.

2. Die Wurzel jedes beliebigen Grades aus reellen Zahlen sowohl als partiell imaginären Ausdrücken der einfachsten Art zu ziehen.

Es versteht sich von selbst, obschon es gleich nachher durch die einzelnen, als verschieden denkbaren, Fälle durchgeführt werden soll, daß man für jede Zahl den Fundamentallogarithmen nehmen, durch den Grad der Wurzel deren Ausziehung aus dieser Zahl gefordert wird, dividiren, und so den Logarithmen des Resultats, aus diesem aber das Resultat selbst

erhalten kann. Unter dieser Voraussetzung ist es leicht, den für die Arithmetik höchst wichtigen Satz, zu beweisen: daß jede Wurzelausziehung, sie geschehe aus welcher Zahl sie wolle, wenn im Ausdrucke dieser Zahl selbst nichts liegt, was die Freyheit der Operation beschränken könnte, nicht mehr und nicht weniger verschiedene Werthe geben muß, als der Grad der auszuziehenden Wurzel Einheiten hat; alle enthalten unter einem generellen Ausdrucke, dessen einfachster oder fundamentaler Werth derjenige ist, den die Rechnung an dem Fundamentallogarithmen der Zahl ergibt, woraus die Wurzel gezogen werden soll.

Es ist nicht überflüssig zu wiederholen, es sey in diesem Satze vorausgesetzt, daß die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, entweder als ursprünglich, oder doch in solcher Form gegeben worden, daß dadurch über die Art und Weise wie sie als aus Factoren zusammengesetzt gedacht werden soll oder mag, sich nichts vorgeschrieben finde, was die beabsichtigte Zerfällung in Factoren bedingen könnte.

Sey allgemein $\sqrt[n]{A}$ gesucht, und dafür ein Werth a gefunden. Gibt es noch andere, so kann jeder von ihnen, so fern er von a verschieden seyn soll, auf die Form a . b gebracht werden, da aus seiner Division durch a ein Quotient, der b genannt werden darf, entspringen muß. Soll $\sqrt[n]{A} = a . b$ seyn, so ist $(a . b)^n = a^n . b^n = A = a^n$, also $b^n = 1$, also $b = \sqrt[n]{1}$. Aber $\sqrt[n]{1}$ hat allemal n verschiedene Werthe, und nicht mehr oder weniger als diese.

Man suche also durch Fundamentallogarithmen den einen Werth für $\sqrt[n]{A}$, den ihr Gebrauch allemal geben muß. Er ist der Fundamentalwerth dieses vieldeutigen Ausdrucks. Und wenn man etwa das Zeichen $\sqrt[n]{}$ zur Andeutung des generellen

Werths der Radicalgröße erheben, das gewöhnliche in diesem Sinne gebrauchte Zeichen $\sqrt[n]{}$ als Anzeiger ihres einfachsten, oder Fundamentalwerths annehmen wollte, so würde $\overline{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{A}.\overline{\sqrt[n]{1}}$ das eben Bewiesene darstellen. Ausführlicher $\overline{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{A}.\left[\cos\frac{2m}{n}\pi + \left(\sin\frac{2m}{n}\pi\right)\sqrt{-1}\right]$, so daß für m alle ganze Zahlen von o bis an m gesetzt werden müßten, um aus dem generellen Ausdruck des Gesuchten alle einzelnen Werthe, in denen es sich darstellen kann, abzuleiten.

Bey Wurzelausziehungen durch Hülfe der Logarithmen lassen sich folgende Fälle unterscheiden.

a. Ist die Zahl, woraus eine beliebige Wurzel gezogen werden soll, positiv, α, so bleibt es bey der gewöhnlichen Regel. Sey im reellen System $e^a = \alpha$, so wird $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$, und also $\log(\sqrt[n]{\alpha}) = \frac{\log.\alpha}{n}$ seyn, wozu rückwärts die Tafeln die zugehörige Zahl geben. Hat man auf diese Art $\sqrt[n]{\alpha}$, so wird alsdann allgemein $\overline{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n]{(\alpha)}.\overline{\sqrt[n]{(1)}} = \sqrt[n]{\alpha}\left[\cos\frac{2m}{n}\pi + \left(\sin\frac{2m}{n}\pi\right)\sqrt{-1}\right]$.

b. Ist die Zahl negativ, $-\alpha$, so wird ihr Fundamentallogarithme, falls im reellen System $e^a = \alpha$ ist, $a \pm \pi\sqrt{-1}$, also der ihrer nten Wurzel $\frac{a}{n} \pm \frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$; mithin diese selbst

$$e^{\frac{a}{n} \pm \frac{\pi}{n}\sqrt{-1}} = e^{\frac{a}{n}}.e^{\pm\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{(\alpha)}.\sqrt[n]{(-1)}$$

$$= \sqrt[n]{(\alpha)}\left[\cos\frac{\pi}{n} \pm \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Will man den generellen Werth $\overline{\sqrt[n]{(-\alpha)}}$, so muß man dem fundamentalen noch den Factor $\overline{\sqrt[n]{1}} = \cos\frac{2m}{n}\pi \pm$

$(\sin \frac{2m}{n}\pi)\sqrt{-1})$ beyfügen, das Product der beyden partiell imaginären Formen, die dann zusammentreten, ist $\cos\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi + \left[\sin\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi\right]\sqrt{-1}$. Es würde also:

$$\sqrt[n]{(-\alpha)} = \sqrt[n]{(\alpha)}\left[\cos\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi + \left[\sin\left(\frac{2m+1}{n}\right)\pi\right]\sqrt{-1}\right]$$

wo offenbar der letzte Factor $= \sqrt[n]{(-1)}$.

c. Ist die Zahl rein imaginär $(\beta\sqrt{-1})$, so wird wenn e^b im reellen System $= \beta$, ihr Fundamentallogarithme $= b \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, also der ihrer nten Wurzel $\frac{b}{n} \pm \frac{\pi}{2n}\sqrt{-1}$. Also diese selbst $e^{\frac{b}{n} \pm \frac{\pi}{2n}\sqrt{-1}} = e^{\frac{b}{n}} \cdot e^{\pm\frac{\pi}{2n}\sqrt{-1}}$. Nun ist $e^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{(\beta)}$. Man erhält also $\sqrt[n]{(\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(\beta)} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2n} \pm (\sin\frac{\pi}{2n})\sqrt{-1}\right]$

Gibt man diesem Ausdrucke noch den Factor $\sqrt[n]{1}$ zu, und multiplicirt man würklich durch dessen Werth, so kommt:

$$\sqrt[n]{(\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(\beta)} \cdot \left[\cos\left(\frac{4m+1}{2n}\right)\pi \pm \left[\sin\left(\frac{4m+1}{2n}\right)\pi\right]\sqrt{-1}\right]$$

Der letzte Factor ist hier das entwickelte $\sqrt[2n]{(-1)}$, wie sich gehört.

d. Sey endlich die Zahl partiell imaginär $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, so ist, für $\frac{\beta}{\alpha} = \tan\varphi$, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1} = \frac{\alpha}{\cos\varphi}[\cos\varphi \pm (\sin\varphi)\sqrt{-1}]$ folglich $\log(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm \varphi\sqrt{-1}$; mithin

$\log \sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \frac{1}{n} \cdot \log \frac{\alpha}{\cos \varphi} \pm \frac{\varphi}{n} \sqrt{-1}$; folglich:

$\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)} \left[\cos \frac{\varphi}{n} \pm \left(\sin \frac{\varphi}{n}\right) \sqrt{-1}\right]$.

Um auch hier den generellen Werth zu erhalten, braucht der gefundene fundamentale nur mit $\sqrt[n]{1}$ multiplicirt zu werden. Geschieht dieses an seinem letzten Factor, so findet sich $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)}$ $\left[\cos \left(\frac{2m\pi + \varphi}{n}\right) \pm \left[\sin \left(\frac{2m\pi + \varphi}{n}\right) \sqrt{-1}\right]\right.$. Sollten die verschiedenen Particularwerthe der gesuchten Wurzel entwickelt werden, so ist dieser Ausdruck, der auf fertige Tafeln Beziehung nimt, der zweckmäßigste. Zur bloßen Andeutung wäre es kürzer, den Factor $\sqrt[n]{1}$ unentwickelt beyzusetzen.

Man würde indessen für die würkliche Rechnung wohl thun, wenn $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$ gefunden werden soll, die beyden Fälle: den einen, wo α positiv ist, den andern, wo es das — Zeichen führt, zu unterscheiden.

Für den ersten bliebe ganz die vorige Formel; $\frac{\alpha}{\cos \varphi}$ wäre immer positiv, $\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)}$ könnte also sogleich aus dem reellen Potenzensystem berechnet werden.

Für den zweyten Fall $(-\alpha \pm \beta \sqrt{-1})$ würde in dieser Hinsicht das Gegentheil eintreten, und es wäre deswegen zweckmäßig, $-\alpha \pm \beta \sqrt{-1} = (-1)(\alpha \mp \beta \sqrt{-1})$ zu setzen, so daß $\sqrt[n]{(-\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(-1)} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)}$.

$\left[\cos\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right) \mp \left(\sin\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right)\right)\sqrt{-1}\right]$ wo, wenn für $\sqrt[n]{(-1)}$ sein Werth $\cos\frac{\pi}{n} \pm \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$ gesetzt und damit am letzten Factor multiplicirt würde,

$$\sqrt[n]{(-\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left[\cos\left(\frac{(2m\pm1)\pi+\varphi}{n}\right) \pm \sin\left(\frac{(2m\pm1)\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

hervorgehn müßte, so daß der erste Factor durch das reelle Potenzensystem, der zweyte aus dem imaginären, sofort erhalten werden könnte.

Durch Hülfe des auf gebrochene Exponenten erstreckten binomischen Satzes ließe sich $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})}$ unmittelbar in eine Reihe entwickeln, und aus dieser, paare Glieder für sich, unpaare wieder für sich zusammengefaßt, würde das Resultat auch in der Form $A \pm B\sqrt{-1}$ sich ergeben. Indessen dürfte auf solche Art Etwas brauchbares selten zu Stande kommen.

Auch bey den Wurzelausziehungen sind die generellen Logarithmen, den allerersten Fall, wo $\sqrt[n]{1}$ gesucht wurde, abgerechnet, völlig überflüssig, indem aus ihrem Gebrauch durchaus nichts anders, als was die bisherige, bloß auf Fundamentallogarithmen gestützte, Theorie gegeben hat, entstehn würde. In der letzten Formel, für $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})}$ ist eigentlich die ganze Lehre von der Wurzelausziehung aus reellen, rein oder partiell imaginären bestimmten Zahl-Ausdrücken enthalten. Gesetzt also, man suchte für $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ den generellen Logarithmen, welcher in Gemäßheit des Voranstehenden (II, D, d, und I, B), $= \log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm \varphi\sqrt{-1} + 2m\pi\sqrt{-1}$ seyn würde. Dieser durch den Grad der auszuziehenden Wur-

zel dividirt, würde den Logarithmen des gesuchten: $\frac{1}{n}\log\left(\frac{a}{\cos\varphi}\right) \pm \frac{1}{n}\varphi\sqrt{-1} + \frac{2m}{n}\pi\sqrt{-1}$ mithin das Gesuchte

$$\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left[\cos\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right) \pm \left[\sin\left(\frac{2m\pi+\varphi}{n}\right)\right]\sqrt{-1}\right]$$

geben, vollkommen das Nemliche, was die obige Betrachtung durch Fundamentallogarithmen dargeboten hat.

Zur Erleichterung des Mechanismus in Ausübung der voranstehenden Regeln dient folgende Bemerkung:

Bey den vier Grundoperationen der Potenzenrechnung, sofern dieselben durch Hülfe der für das imaginäre Potenzensystem berechneten Tafeln vollzogen werden, hebt man immer damit an, daß man eine reelle Zahl als Tangente einer andern betrachtet, um von dieser Cosinus und Sinus aus den Tafeln zu finden, und damit weiter zu verfahren. Unter solchen Umständen kann es ganz gleichgültig seyn, ob die Tafeln neben den Sinus Cosinus und Tangenten die in ihnen stehn, die Zahlen selbst stellen, denen diese unter ihren Benennungen zugehören, oder ändre denselben proportionale, wie es in der That der Fall ist. Man darf also, wenn man eine gegebene Zahl in der Tangentencolumne der Tafeln gefunden hat, und daneben in der Zahlencolumne ein gewisser, in Graden ausgedrückter Winkel, φ steht, diese Zahl sofort tg φ nennen, obschon sie streng genommen nicht tg φ, sondern tg $\left(\frac{\varphi}{360}.2\pi\right)$ ist, denn die neben ihr den beyden ersten Columnen der Tafeln stehenden, welche auch eigentlich sin $\left(\frac{\varphi}{360}2\pi\right)$ und cos $\left(\frac{\varphi}{360}.2\pi\right)$ sind, nun aber auch sin φ und cos φ heißen,

werden dadurch gar nicht afficirt, und nur ihren Betrag verlangt man zu erhalten. Da es bey dem würklichen Rechnen mit den Formen selbst, in denen von solchen φ die Rede ist, nur darauf ankommt, Summen, Differenzen, Vielfache oder aliquote Theile von ihnen zu bestimmen und zuletzt deren Sinus und Cosinus anzugeben, so werden diese, wenn man statt des eigentlichen φ die in den Tafeln statt ihrer stehenden, durch einen unabänderlichen Factor von ihnen verschiedenen substituirt, sich von den wahren Resultaten nur dadurch unterscheiden, daß auch sie jenen unabänderlichen Factor in sich tragen, den man den wahren Resultaten als solchen würde beygeben müssen, wenn man für sie Sinus und Cosinus aus den Tafeln erhalten wollte.

Man rechne also unbedingt, als wenn, in analytischem Sinne der Kunstwörter, die Tafeln in ihrer ersten Columne die Zahlen enthielten, wovon in der folgenden die zugehörigen Sinus, Cosinus und Tangenten zu finden wären. Dann würde für $2\pi = 360°$, für $\pi = 180°$ u. s. w. gesetzt werden müssen, wo von Sinus oder Cosinus oder Tangente dieser Zahlen die Rede wäre.

Es mag der Vollständigkeit wegen bemerkt werden, daß der Theil von den durch das Vorstehende geregelten Rechnungen, wobey es nur darauf ankommt, die Fundamentallogarithmen reeller positiver Zahlen zu nehmen, durch Addition oder Subtraction zu verbinden, oder an solchen durch eine reelle Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, um das Resultat selbst wieder als Logarithmen zu betrachten, und rückwärts zu ihm die zugehörige Zahl zu suchen, eben so gut durch Hülfe des briggischen, als des natürlichen Logarithmensystems vollzogen werden kann.

E. Potenziirung im allgemeinen Sinne.

Die durch Verbindung der dritten und vierten Grundregel entspringende allgemeine: um eine Zahl zu potenziiren, müsse man sie selbst als Potenz des für das System, worin man rechnet, angenommenen Grundfactors betrachten, und den Grad von dieser, also den Logarithmen der Zahl mit dem jedesmaligen Exponenten jener neu verlangten Potenz multipliciren, wodurch denn der Logarithme des Gesuchten und daraus rückwärts dieses selbst erhalten werde, ruft, sobald die Exponenten der verlangten Potenzen keine ganze Zahlen sind, Ausdrücke hervor, bey denen, ob sie vieldeutig sind, und außer dem Fundamentalwerth, den die unmittelbare Anwendung jener Regel absolut oder hypothetisch allemal ergeben wird, auch noch andre besitzen, auf das sorgfältigste untersucht werden muß.

a. **Ist der Exponent ein rationaler Bruch**, gleich ob positiv oder negativ $= \frac{r}{n}$, so ist, um für $A^{\frac{r}{n}}$ den amentalwerth zu erhalten, nur erforderlich, daß man og A berechne, und dazu die zugehörige Zahl aufsuche. e mag a heißen. Man hat also $A^{\frac{r}{n}} = a$. Auf die ob nicht noch andere Werthe für $A^{\frac{r}{n}}$ möglich sind, problematisch einen solchen a.b. Es soll also nicht $A^{\frac{r}{n}} = a$, mithin $A = a^{\frac{n}{r}}$, sondern auch $A^{\frac{r}{n}} = ab$, folg- $= a^{\frac{n}{r}} . b^{\frac{n}{r}}$, also $b = \sqrt[n]{1^r}$ seyn. Mithin ist der Werth $A^{\overline{\frac{r}{n}}} = A^{\frac{r}{n}} . \overline{\sqrt[n]{1^r}}$.

Vieldeutigkeit der Ausdrücke, worin Potenzen mit Exponenten erscheinen, auf die Bedeutung des

Ausdrucks $\sqrt[n]{1^r}$ ankommt, so verdient derselbe in dieser Beziehung die sorgfältigste Betrachtung *).

Man kann den Ausdruck $\sqrt[n]{1^r}$ auch in Beziehung auf die Vieldeutigkeit der Wurzelausziehungen auf zwey verschiedene Arten auffassen. Er kann erstlich so angesehen werden, daß er verlangt, man solle eine Zahl, als ein Product, ruhend

*) In der That ist hier die Möglichkeit zu irren sehr nahe liegend. Wollte man z. B. sagen: Da 1^r, wenn, wie hier angenommen worden, r eine ganze Zahl seyn soll, allemal $= 1$, so ist $\sqrt[n]{(1^r)} = \sqrt[n]{1}$, so würde in vielen Fällen ein unrichtiges Resultat herauskommen. Denn es macht einen wesentlichen Unterschied, falls an einer Zahl Wurzelausziehung vorgenommen werden soll, ob über die Art, wie man die Entstehung dieser Zahl aus gleichen Factoren denken soll, Etwas vorgeschrieben, oder ob dieses der Willkühr überlassen ist. Wenn z.B. $(+4)^2$ Ausdruck einer gegebenen Zahl seyn soll, so wird eben dadurch verlangt, daß wir dieselbe als Product der Factoren $(+4)$ und $(+4)$ denken sollen. Wird also hernach gefordert, die so gedachte Zahl in zwey gleiche Factoren zu zerlegen, so kann der einzelne von diesen blos $(+4)$ seyn; mithin $\sqrt[2]{(+4)^2}$ lediglich $= +4$. Wäre aber schlechthin die Zahl $+16$ gegeben, mit der Forderung, sie in zwey gleiche Factoren zu zerfällen, so bliebe völlige Freyheit in Beziehung auf die Art und Weise, wie die Entstehung der Zahl $(+16)$ aus zwey gleichen Factoren gedacht werden möchte. Mithin, da nicht allein $(+4)(+4)$, sondern auch $(-4)(-4) = +16$ seyn kann, würde $\sqrt[2]{(+16)}$ mit gleichem Recht entweder $= +4$, oder $= -4$ gesetzt werden dürfen. Man soll also eine vorangegangene Potenziirung nicht gewissermaßen verwischen, indem man blos ihr Resultat ansetzt, wenn von einer nachfolgenden Wurzelausziehung die Rede ist. Die Gesetze des Calculs bestätigen diese Vorschrift vollkommen. Uebrigens wird es allerdings im würklichen Gebrauch des Calculs Fälle geben, wo eine Zahl als durch Potenziirung hervorgebracht angedeutet ist, wo aber bey einer später an ihr vollziehenden Wurzelausziehung in der That jene Entstehung derselben als verwischt angesehen werden muß. Sie erfordern große Vorsicht, um so mehr, da es bis jetzt an Zeichen fehlt, solche Unterscheidungen auszudrücken.

in r Factoren, jeder gleich 1, gedenken, und in dieser Form aus ihr $\sqrt[n]{}$ ziehn. In diesem Falle bleibt also nichts anders übrig, als die geforderte Wurzel aus jedem jener Factoren zu suchen, und diese Resultate selbst wieder zu einem Producte zusammenzuziehn. Dadurch also geht $\sqrt[n]{(1)^r}$ in $(\sqrt[n]{1})^r$ von selbst über und dieses ist die zweyte Art, wie sich $\sqrt[n]{1^r}$ betrachten läßt. Die Identität beyder wird, sofern noch von Vieldeutigkeit der Radicalgrößen nicht die Rede ist, schon in den Elementen dargethan und gilt allgemein, es mag $\sqrt[n]{}$ nur einen einzigen Werth, oder es mag deren mehrere anzunehmen fähig seyn.

Frägt man nun weiter, wie viele verschiedene Werthe $(\sqrt[n]{1})^r$ erhalten könne, so müssen zwey Fälle unterschieden werden.

Sind erstlich die beyden Zahlen r und n Primzahlen unter sich, so ist die Zahl der Werthe einerley mit dem Grade der auszuziehenden Wurzel. Es ist bekannt, daß $\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{n}}$ nicht mehr oder nicht weniger als n verschiedene Werthe hat, die man am leichtesten erhält, wenn man alle positiven Zahlen von 0 bis an n für m setzt; es ist bewiesen, daß größere positive oder überhaupt negative für m zu substituiren nichts heißt, als von Neuem Resultate hervorbringen, die schon für positive m, kleiner als n, da gewesen sind. Nun aber soll noch $\sqrt[n]{1}$ zur rten Potenz erhoben werden, und da entsteht die Frage, ob die rten Potenzen jener unter sich verschiedenen Werthe des $\sqrt[n]{1}$ auch immer unter sich differiren werden. Sey der eine, der hte $= e^{2h\pi.\frac{r}{n}\sqrt{-1}}$, der andere, der kte $= e^{2k\pi.\frac{r}{n}\sqrt{-1}}$, wo h und k zwey belie-

bige verschiedene Zahlen und jede kleiner als n seyn dürfen. Sollten sie gleich seyn, so müßten ihre Exponenten um irgend ein beliebiges Vielfache von $2\pi\sqrt{-1}$, allgemein das lfache unterschieden seyn (Cap. XI, II. 4.). Es müßte also $\left(\frac{h-k}{n}\right)r = l$ seyn. Dies ist unmöglich, wenn r und n keinen Factor mit einander gemein haben, denn da h und k kleiner als n ist, kann es dagegen nicht gehoben werden, wie geschehen müßte, wenn $\left(\frac{h-k}{n}\right)r$ eine ganze Zahl werden sollte. Es hat also alsdann $\sqrt[n]{1^r}$ so viel verschiedene Werthe als $\sqrt[n]{1}$.

Besitzen hingegen zweytens n und r einen gemeinschaftlichen Factor, so wird $\sqrt[n]{1^r} = e^{2m\pi.\frac{r}{n}\sqrt{-1}}$ nicht n verschiedene Werthe erhalten. Denn sey $r = f.\varrho$, und $n = f\nu$. Da man für m alle Werthe von o bis an n zu setzen hat, so wird unter k jede ganze Zahl von o bis an r, unter l jede ganze Zahl von o bis an f verstanden, $m = k + l\nu$ gesetzt werden dürfen. Für alle Werthe von m, in denen k dasselbe bleibt, während l wechselt, deren also für jedes k an Zahl f möglich sind, muß jene Exponenzialgröße denselben Werth annehmen. Denn alsdann ist die Differenz zwischen dem niedrigsten Werthe von m, für $l = o$ und irgend einem andern $l\nu$ selbst. Die Exponenten differiren also um $l\nu.\frac{r}{n}.2\pi\sqrt{-1}$ d. h. da $n = f\nu$, und $r = f.\varrho$ seyn sollte, um $l.\varrho.2\pi\sqrt{-1}$ d. h. um ein Vielfaches von $2\pi\sqrt{-1}$ und folglich sind die Werthe der Exponenzialgrößen, denen sie gehören, identisch.

Sobald aber, bey Bestimmung des m, für k ein anderer Werth genommen wird, differiren die Exponenten nicht um ein solches Vielfaches von $2\pi\sqrt{-1}$, können also die Expo=

nenzialgrößen keine gleichen Werthe erhalten. Sey das eine $m = k + l.\nu$, das andere $\mathfrak{k} + \mathfrak{l}.\nu$, so ist die Differenz der Exponenten $(k - \mathfrak{k})\frac{r}{n}.2\pi\sqrt{-1} + (l - \mathfrak{l})\frac{r\nu}{n}2\pi\sqrt{-1}$ $= (l - \mathfrak{l})\,\varrho\, 2\pi\sqrt{-1}$.*) Das erste Glied ist Vielfaches von $2\pi\sqrt{-1}$, das letzte aber da $(k - \mathfrak{k})$ kleiner als ν ist, und dieses keinen Factor mit ϱ gemein hat, kann kein solches geben. Es hat also $\sqrt[n]{1^r} = 1^{\left(\frac{r}{n}\right)}$ so viele verschiedene Werthe als der Nenner des Bruchs, welcher den Exponenten der in diesem Ausdruck enthaltenen Potenz darstellt, Einheiten enthält, vorausgesetzt, daß jener Bruch auf seinem kleinsten Eindruck stehe. Darum macht man es zur Regel, daß gebrochene Exponenten, wenn die vieldeutigen Werthe ihrer Potenzen angegeben werden sollen, auf ihren kleinsten Ausdruck gebracht seyn müssen. Dies vorausgesetzt, wird $\sqrt[n]{1^r}$ mit $\sqrt[n]{1}$ allerdings zusammenfallen. Wollte man indeß den anfänglichen Ausdruck des Exponenten behalten, so würde die Vorschrift so eingekleidet werden müssen: Man erhält $\sqrt[\overline{n}]{1^r}$ $= 1^{\left(\frac{\overline{r}}{n}\right)}$, wenn ν den Factor bedeutet, den der reducirte Bruch $\frac{r}{n}$ im Nenner behält, indem man $\sqrt[\overline{n}]{1^r} = 1^{\left(\frac{\overline{r}}{n}\right)} =$ $1^{\left(\frac{\overline{1}}{\nu}\right)}$ setzt.

Es geht aus dieser Betrachtung hervor, daß die bekannte Regel, man dürfe bey jeder Radicalgröße Grad der Potenz und auszuziehenden Wurzel, oder bey jeder Potenz eines gebrochenen Exponenten in diesem Exponenten Zähler und Nenner mit demselben beliebigen Factor multipliciren, ohne den Werth des Ausdrucks zu ändern, vollkommen richtig bleibt, auch dann, wenn dieser als vieldeutiger betrachtet und eine

*) $+ (k - \mathfrak{k})\frac{\varrho}{\nu}.2\pi\sqrt{-1}$

generelle Darstellung seiner Werthe angegeben werden soll. In den Fällen also kann $\sqrt[n]{1^r} = 1^{\left(\frac{r}{n}\right)}$ alle Vieldeutigkeit gänzlich verlieren, wo r ein Vielfaches von n ist, wo dann jedesmal jener Ausdruck bloß 1 bedeuten wird. Die einfachsten dieser Art finden für $r = 0$ und $r = n$ statt, $\sqrt[n]{1^0}$ und $\sqrt[n]{1^n}$ haben nur den Werth 1.

b. **Ist der Exponent ein Irrational-Ausdruck**, der sich nur näherungsweise berechnen läßt; so wird die ihn führende Potenz, welche in diesem Falle eine **intercendente Größe** genannt zu werden pflegt, unendlich vieler Bedeutungen fähig. Denn Irrational-Ausdrücke entwickeln sich, bey nähernder Berechnung, durch Brüche, deren Nenner immer größere Zahlen werden, so wie die Näherung weiter fortschreitet.

Man darf indessen in solchem Falle keineswegeß glauben, als wenn hier, regellos und ohne Zusammenhang, eine, jede Anzahl überschreitende Menge successiver Werthe hervortreten werde. Auf ähnliche Weise wie, sofern bloß von dem Fundamentalwerthe die Rede ist, ein sich allmälig aus Theilen fortbildender Exponent nur die fortlaufende Berechnung eines Products aus nach und nach zutretenden Factoren erfordern würde, verhält es sich auch mit den generalisirenden Factoren, die dem Fundamentalwerth der Potenz mit gebrochenem Exponenten zugesellt werden müssen, um ihren generellen Werth auszudrücken. Sey allgemein bey der Andeutung $\overline{A^i}$, i ein Irrationalausdruck. Habe sich i anfangs durch einen Bruch vom Nenner n näherungsweise berechnet, so wird $\overline{A^i} = A^i \cdot \sqrt[n]{(1)}$ seyn. Sollte sich nachher i weiter entwickeln, so daß es genauer durch einen Bruch vom Nenner ns approximativ dargestellt wäre, so würde $\overline{A^i} = A^i$.

$\sqrt[ns]{(1)}$. Man hatte also früher $\sqrt[n]{1}$, später $\sqrt[ns]{1}$ zu berechnen, wenn man alle Werthe des Verlangten erhalten wollte. Aber es ist klar, daß man sämmtliche Werthe für $\sqrt[ns]{1}$ erhalten muß, wenn man allmälig jeden, welcher $\sqrt[n]{1}$ angehört, nur mit den s ersten Werthen, die in $\sqrt[ns]{1}$ liegen, multipliciren will. Denn allgemein ist der rte Werth von $\sqrt[ns]{1} = \cos \frac{r}{ns} 2\pi + (\sin \frac{r}{ns} 2\pi.) \sqrt{-1}$. Nun ist $r = hs + p$, wo unter p jede geringere Zahl als s unter h jede kleiner als n verstanden werden muß, also wird $\frac{r}{ns} = \frac{h}{n} + \frac{p}{ns}$ und folglich:

$$\sqrt[ns]{1} = \cos \left(\frac{h}{n} 2\pi + \frac{p}{ns} 2\pi\right) + \left[\sin \left(\frac{h}{n} 2\pi + \frac{p}{ns} 2\pi\right)\right]$$

$\sqrt{-1}$. Dieses ist aber offenbar ein Product aus $\cos \left[\frac{h}{n}.2\pi + \left(\sin \frac{h}{n}.2\pi\right)\right] \sqrt{-1}$ (welcher Ausdruck, da für h alle Zahlen kleiner als n gelten sollen, jeden Werth von $\sqrt[n]{1}$ bedeutet) in den Factor $\cos \frac{p}{ns} 2\pi + \left(\sin \frac{p}{ns} 2\pi\right) \sqrt{-1}$ welcher, da unter p jede ganze Zahl kleiner als s, gedacht werden soll, jeden von den s ersten Werthen, die $\sqrt[ns]{1}$ in sich schließt, zur Anzeige bringt.) Es bleiben also alle Werthe von $\sqrt[ns]{1}$ bestehn, und aus jedem derselben werden, durch Multiplication mit den s ersten Werthen, die $\sqrt[ns]{1}$, logarith-

misch entwickelt, an die Hand gibt, als hinzutretenden Factoren, eben so viele neue, deren Totalinbegriff alsdann $\sqrt[ns]{1}$ darbieten muß. Und, sobald man bey der Berechnung in den Zahlen, welche das Resultat darstellen, eine bestimmte Grenze der Näherung nicht überschreiten will, wird, wenn $\frac{2\pi}{n}$ diese bezeichnet, $\sqrt[n]{1}$ mit $\sqrt[ns]{1}$ völlig zusammenfallen, weil alsdann der Unterschied zwischen $\cos\left(\frac{h}{n}2\pi + \frac{p}{ns}2\pi\right)$ und $\cos\left(\frac{h}{n}2\pi\right)$, so wie der zwischen $\sin\left(\frac{h}{n}2\pi + \frac{p}{ns}2\pi\right)$ und $\sin\left(\frac{h}{n}2\pi\right)$, unter der angenommenen Approximazionsgrenze liegt.

c. Ist der Exponent ein rein imaginärer Ausdruck der einfachsten Art, so daß $A^{n\sqrt{-1}}$ die Andeutung des Verlangten abgibt, so kann es keine Schwierigkeit haben, durch Logarithmen den Fundamentalwerth desselben zu finden. Auf jeden Fall ist log A, unter der Form $a \pm b\sqrt{-1}$ immer enthalten, sogleich aus den Tafeln zu nehmen, dies mit dem Grade der verlangten Potenz multiplicirt, gibt den Logarithmen des Gesuchten ($\pm nb + na\sqrt{-1}$) und die dazu gehörige Zahl kann rückwärts aus den Tafeln immer gefunden werden. Es ist merkwürdig, daß in den Fällen, wo log A rein imaginär $= \pm b\sqrt{-1}$ ist, also $a = o$ wird, der Fundamentalwerth von $A^{n\sqrt{-1}}$ eine reelle Zahl, $e^{\mp nb}$ bedeutet, liegt indessen schon in der einfachen Bemerkung, daß, wenn $A = e^{\pm b\sqrt{-1}}$ unfehlbar $A^{n\sqrt{-1}} = e^{\mp nb}$ seyn werde. Es darf hinzugefügt werden, daß in jedem

andern für $A^{n\sqrt{-1}}$ ein imaginärer Ausdruck erfolgen müsse. Ferner entsteht aber die Frage, ob $A^{n\sqrt{-1}}$ außer jenem Fundamentalwerth, welcher α heißen mag, nicht noch irgend einen andern haben könnte. Sey ein solcher $\alpha\beta$, so soll nicht allein α, sondern auch $\alpha\beta$ den Bedingungen genügen, welche $A^{n\sqrt{-1}}$ fordert. Kann man zu einer Potenz des Grades $n\sqrt{-1}$ erheben, so ist auch eine umgekehrte Potenziirung denkbar, wodurch diese wieder aufgehoben wird, und ihr Grad muß $\frac{1}{n\sqrt{-1}}$ seyn. Jener Annahme gemäß würde also nicht allein, weil $A^{n\sqrt{-1}} = \alpha$ gesetzt ist, folgen, daß $A = \alpha^{\left(\frac{1}{n\sqrt{-1}}\right)}$, sondern, weil $A^{n\sqrt{-1}} = \alpha\beta$ genommen worden, $A = \alpha^{\left(\frac{1}{n\sqrt{-1}}\right)} . \beta^{\left(\frac{1}{n\sqrt{-1}}\right)}$ mithin, da beydes eine einzige unzweydeutige Größe A wiedergibt, $\beta^{\left(\frac{1}{n\sqrt{-1}}\right)} = 1$ folglich $\beta = 1^{n\sqrt{-1}}$. Man kommt also auch hier auf die einfachste Potenziirung, die an der Einheit zu vollziehende, zurück.

Nun ist allgemein $1 = e^{2m\pi\sqrt{-1}}$, mithin $1^{n\sqrt{-1}} = e^{2m\pi . n}$. Allerdings, dem gemäß, da m jede positive oder negative Zahl seyn darf, bekommt $1^{n\sqrt{-1}}$ unzählig viele Werthe, die alle reelle Zahlen sind, und auch $A^{n\sqrt{-1}}$ ist ein Ausdruck, der außer seinem Fundamentalwerthe noch eine unendliche Menge anderer, in denen der Fundamentalwerth mit reellen Factoren multiplicirt erscheint, annehmen kann. Man wird dies in Zeichen durch: $\overline{A^{n\sqrt{-1}}}$

$= A^{n\sqrt{-1}} \cdot \overline{1^{n\sqrt{-1}}}$ ausdrücken dürfen, wobey, daß $\overline{1^{n\sqrt{-1}}} = e^{2m\pi.n}$, besonders bemerkt werden muß.

Man hätte dasselbe Resultat auch durch Hülfe der generellen Logarithmen erhalten können. Ist $A^{n\sqrt{-1}}$ zu finden, und setzt man log A voraus, so ist $\overline{\log} A = \log A + 2m\pi\sqrt{-1}$, also der Logarithme des Gesuchten $(n.\sqrt{-1}) \log A + 2m\pi n$. Mithin das Gesuchte ein Product aus zwey Factoren, von denen der erste $A^{n\sqrt{-1}}$, als Fundamentalwerth, der andere $e^{2m\pi.n}$ seyn muß. Folglich wie vorhin $\overline{A^{n\sqrt{-1}}} = A^{n\sqrt{-1}} . e^{2m\pi.n}$, für welchen letzten Factor auch $\overline{1^{n\sqrt{-1}}}$ gesetzt werden dürfte.

Der Satz, daß $\overline{A^{n\sqrt{-1}}}$ unendlich viele Werthe habe, könnte einer Ausnahme unterworfen zu seyn scheinen, für den Fall, wo $A = e$ gesetzt würde. $e^{n\sqrt{-1}}$ ist die Grundform, aus welcher das imaginäre natürliche Potenzensystem hervorgeht und dieses ist ja nach einer unfehlbaren Regel ohne alle Zweydeutigkeit oder Vieldeutigkeit entwickelt. Darauf dient Folgendes zur Antwort. Es ist im Vorhergehenden bewiesen, daß in dem natürlichen Potenzensystem, worunter wir dasjenige verstehn, welches aus dem Exponenten x den berechneten Werth der zugehörigen Potenz durch die Exponenzialreihe für die Basis e findet, jeder reellen Zahl unzählig viele Logarithmen gehören, weil $e^{2m\pi\sqrt{-1}} = 1$, und also, falls $N = e^n$, n als reel gedacht wäre, allgemein $N = e^{n+2m\pi\sqrt{-1}}$ gesetzt werden darf, worauf die erweiterte Logarithmenrechnung wesentlich ruht. Dieses Gesetz gilt also auch für den Fall $n = 1$, wo $N = e$ wird, und man darf, sobald man

generalisiren will, $e^1 = e^{1+2m\pi\sqrt{-1}} = e . e^{2m\pi\sqrt{-1}}$ setzen. Alsdann aber ist man auch gezwungen einzuräumen, daß $\overline{e^{n\sqrt{-1}}} = e^{n\sqrt{-1}} . e^{2m\pi n}$ sey, das heißt ein unendlich vieldeutiger Ausdruck, von dem das früher entwickelte $e^{n\sqrt{-1}} = \cos n + (\sin n) \sqrt{-1}$ nur den Fundamentalwerth, für $m = o$ darbietet.

Es ist also ein neuer wesentlicher Unterschied zwischen den reellen und rein imaginären Potenzensystemen klar geworden. Ist A eine bestimmte Basis, n ein veränderlicher Exponent, übrigens rational, so berechnet sich A^n nur auf eine einzige Art durch die Exponenzialreihe für die Basis A; sein genereller Werth $A^n (1)^{\overline{n}}$ hat nur eine oder einige bestimmte Bedeutungen. Will man hingegen für dieselbe Basis, als veränderlichen Exponenten $n\sqrt{-1}$ setzen, also ein rein imaginäres Potenzensystem andeuten, so bringt immer der Exponent $n\sqrt{-1}$ ein unendlich Vieldeutiges als Werth der zugehörigen Potenz $A^{n\sqrt{-1}}$ mit sich, so daß jeder Ausdruck dieser Art einen unerschöpflichen generellen Werth besitzt, da dasjenige, was die Exponenzialreihe ergibt, wenn man aus ihr $A^{n\sqrt{-1}}$ unmittelbar berechnet, nur sein Fundamentalwerth ist, während allgemein $\overline{A^{n\sqrt{-1}}} = A^{n\sqrt{-1}} . \overline{1^{n\sqrt{-1}}} = A^{n\sqrt{-1}} . e^{2m\pi n}$ gesetzt werden muß. Dies gilt auch für das natürliche System. Auch dabey ist dasjenige, was wir bisher das imaginäre genannt, und aus dem Ansatz $e^{n\sqrt{-1}}$, für n alle reelle Zahlen, so weit nöthig, setzend, kraft der Exponenzialreihe abgeleitet haben, das fundamentale natürliche imaginäre System, hinreichend für alle Zwecke der practischen Potenzenrechnung. Das generelle würde, wie bereits gezeigt worden $\overline{e^{n\sqrt{-1}}} = e^{n\sqrt{-1}} . e^{2m\pi n} = (\cos$

$n + \sin n\sqrt{-1})\, e^{2m\pi n}$ seyn, so daß für m alle ganze Zahlen, positive sowohl als negative, gesetzt werden dürften, und jedesmal nur eine Specialisirung des in sich unendlich vieldeutigen Ausdrucks $e^{n\sqrt{-1}}$ dadurch entstehen müßte.

Wollte man andre Potenzensysteme als das natürliche, und selbst bey diesem, sofern seine zweyte, aus rein imaginären Exponenten hervorgehende, Hälfte selbst unendlich vielförmig ist, nicht bloß ihren Fundamentalausdruck $e^{n\sqrt{-1}}$ $= \cos n + \sin n\sqrt{-1}$ aufnehmen, so würde sich ein reicher Stoff zu weiteren Untersuchungen, die bisher der theoretischen Analysis fremd geblieben sind, darbieten.

Schon das in Absicht auf die Basis einfachste rein imaginäre Potenzensystem $1^{n\sqrt{-1}}$ würde einen solchen an die Hand geben. Es ist vorhin gezeigt, daß $1^{n\sqrt{-1}} = e^{2m\pi . n}$. Nennt man $e^{2m\pi} = A$, so wird $A^n = 1^{n\sqrt{-1}}$. Offenbar also ist $1^{n\sqrt{-1}}$ ein allgemeines Schema, wodurch unzählig viele reelle Potenzensysteme (alle diejenigen, deren Modulus unter die Form $2m\pi$ fällt) bezeichnet werden. Und so würde sich auch hier die imaginäre Form als die allgemeine, aus der, durch Specialisirung, die reelle hervortreten kann, im höheren Zusammenhange der Potenzensysteme unter einander, nachweisen lassen.

d. **Ist endlich der Exponent partiellimaginär**, also $A^{1+m\sqrt{-1}}$ zu berechnen, so kann es wiederum keinen Anstand haben, den Fundamentalwerth eines solchen Ausdrucks sowohl als den generellen zu erhalten, um so weniger, da wenn man will, dieser Fall auf die vorigen zurückkommt, weil $A^{1+m\sqrt{-1}} = A^1 . A^{m\sqrt{-1}}$ ist. Man darf also so-

fort $A^{\overline{l+m\sqrt{-1}}} = A^{l+m\sqrt{-1}} \cdot 1^{\overline{l+m\sqrt{-1}}}$ setzen. Ist l eine ganze Zahl, so wird sich der den Fundamentalwerth generalisirende Factor, weil alsdann $1^l = 1$ ist, auf $1^{\overline{m\sqrt{-1}}}$ zusammenziehen. Aber jedesmal wird der generelle Ausdruck des Resultats eine unendliche Menge specieller Werthe in sich schließen. Auch diese Formen bieten, für die allgemeinste Theorie der Potenzensysteme, Gegenstände weiterer Betrachtungen dar.

F. Die Rechnung mit Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, als vieldeutigen Größen.

Eine gründliche Elementar-Arithmetik beweist die bekannten Grundregeln der Potenzenrechnung: daß $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$; $A^n : A^m = A^{n-m}$, $(A^n)^m = A^{nm}$; $\sqrt[n]{(A^m)} = A^{\frac{m}{n}}$, unter der Voraussetzung, daß der Grundfactor eine positive Zahl ist, und auch bey den aus ihm gebildeten Potenzen von keinen andern als positiven Werthen die Rede seyn soll, unmittelbar aus dem Grundbegriff der Potenz, für alle Werthe der Exponenten, sie mögen ganze Zahlen oder Brüche, positiv oder negativ seyn.

Vermöge des, in seinem gehörigen Umfange entwickelten natürlichen Potenzensystems lassen sich die nemlichen Sätze, wenn auch meistens nur hypothetisch auf jeden Grundfactor A, er sey positiv oder negativ, oder eine imaginäre Grundform, erstrecken. Dieses ist durch die unmittelbar voranstehenden Abschnitte des gegenwärtigen Capitels geleistet worden. Aber, im Verlauf der Betrachtungen über die Potenzen selbst, hat sich das Resultat ergeben, daß jede Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, einen vieldeutigen Ausdruck darstellt. Wenn in den Elementen von Potenzen mit ge-

brochenen Exponenten die Rede ist, denkt man sich unter solchen Formen nur Andeutungen einer einzigen bestimmten Zahl, aus denen also, wenn sie sich durch Rechnungen verknüpfen, nur eine einzige von eben der Beschaffenheit entspringen kann. Gegenwärtig aber, wenn wir Potenzen mit gebrochenen Exponenten aufstellen, können wir sie als vieldeutige Ausdrücke, deren einzelne Werthe unter einem generellen enthalten sind, betrachten. Es entsteht also die wichtige Frage: **ob die Fundamentalregeln des Rechnens für Potenzen des nemlichen Grundfactors Sinn haben,** sofern **die dabey als gegeben angenommenen Ausdrücke vieldeutige Größen sind, und ob sie im bejahenden Fall näherer Bestimmungen und Modificationen bedürfen oder nicht.**

Was nun zuvörderst die Möglichkeit von Rechnungsregeln für Verknüpfungen von vieldeutigen, unter generellen Ausdrücken enthaltenen Größen betrifft, so ist eine solche leicht nachzuweisen. Zwey allgemein ausgedrückte vieldeutige Größen durch eine bestimmte Operation, die selbst unzweydeutig ist, verknüpfen, kann nichts anders heißen, als allmälig, mit jedem einzelnen Werthe der einen, jeden einzelnen der andern verbinden und alle diese partiellen Verbindungen in einen Inbegriff zusammenziehn. An einer vieldeutigen Größe eine vieldeutige Operation vollziehn, wird soviel sagen als: jeden einzelnen Werth jener Größe hervorheben, an ihm diese Operation vollbringen, und die einzelnen Resultate, die sie, als vieldeutige geben kann, entwickeln, um zuletzt sie alle als Zusammengehörige, vollständig aufzuführen. Ob aber für solche Inbegriffe einzelner Resultate generelle Ausdrücke möglich sind, und wie sie erhalten werden können, ruht auf fernerer Untersuchung, welche, die Fundamentalregeln der Potenzenrechnung vollständig durchlaufend, darüber das Nähere ergeben muß.

Sofern nur von Fundamentalwerthen die Rede ist, und unter A eine beliebige Zahlenform, unter $\frac{m}{n}$ und $\frac{r}{s}$ beliebige rationale Brüche verstanden, wobey es gestattet ist, die Zähler beliebig als positive oder negative Zahlen zu denken, ist die erste Regel der Potenzenrechnung, wobey $A^{\frac{m}{n}}$ und $A^{\frac{r}{s}}$ nur als eindeutige Größen betrachtet werden: $A^{\frac{m}{n}} + A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$. Es ist gegenwärtig zu untersuchen, wie es sich mit den Producten aus solchen Multiplicationen verhält, insofern die Factoren als vieldeutige Ausdrücke genommen werden.

In Gemäßheit (E, a) ist $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} = A^{\frac{m}{n}} \,.\, 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}$ und ebenso $A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\frac{r}{s}} \,.\, 1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$, wo die Vieldeutigkeit in den letzten Factoren ruht, während $A^{\frac{m}{n}} . A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$ gemeinschaftlicher Factor aller einzelnen Producte seyn wird. Man hat also zu erforschen, wie viele einzelne, würklich verschiedene Producte aus der durch $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . 1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$ angedeuteten vieldeutigen Multiplication entspringen können.

Es ist bekannt, daß, wofern ν und σ die Nenner der Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{r}{s}$ bedeuten, sofern sie gegen die Zähler nicht gehoben werden können, $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$, und $1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}$ sey. Es kommt also auf die Vieldeutigkeit des Products $1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}} . 1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}$ an.

Da bekanntlich $1^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \cos\frac{h}{\sigma}2\pi + \left(\sin\frac{h}{\sigma}2\pi\right)\sqrt{-1}$, wobey für h alle Werthe von o bis an σ gesetzt werden müssen, und in gleicher Art $1^{\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \cos\frac{k}{\nu}2\pi + \left(\sin\frac{k}{\nu}2\pi\right)\sqrt{-1}$, wo für k alle ganze Zahlen von o bis an ν genommen werden sollen, so hat man offenbar eine Andeutung, in der jedes der Producte, die aus den vorliegenden vieldeutigen Factoren möglich sind, enthalten ist, wenn man das Product jener generellen Entwicklung berechnet, welches $=$

$$\cos\left(\frac{h}{\sigma}2\pi + \frac{k}{\nu}2\pi\right) + \left[\sin\left(\frac{h}{\sigma}2\pi + \frac{k}{\nu}2\pi\right)\right]\sqrt{-1}$$

$$= \cos\left(\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}2\pi\right) + \left[\sin\left(\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}2\pi\right)\right]\sqrt{-1}$$

seyn wird, mit der Bemerkung, daß in diesem Ausdrucke nicht allein für h alle Werthe von o bis an σ, sondern auch für k alle von o bis an ν gesetzt werden dürften; wodurch denn der Anzahl nach im Ganzen deren $\nu\sigma$ hervorgehen könnten.

Aber jener allgemeine Ausdruck, obschon allerdings aus ihm jedes einzelne der geforderten Producte abgeleitet werden kann, bedarf, um dem eigentlichen Zwecke zu entsprechen, einer weiteren Bearbeitung. Namentlich ist die erste Frage, ob aus demselben, wenn er innerhalb der angewiesenen Grenzen gebraucht wird, in der That lauter verschiedene Werthe entspringen. Dabey müssen sofort zwey Fälle unterschieden werden.

Im ersten Fall haben die Zahlen ν und σ keinen Factor gemein, so daß alsdann der Bruch $\frac{h\nu + k\sigma}{\sigma\nu}$, sofern h und k unbestimmt in ihm bleiben, auf seinem kleinsten Ausdruck

steht. Ist dieses, so ergibt sich sogleich, daß, so wie man für k und h andre Werthe setzt, jener Bruch selbst durchaus verschiedene annehmen müsse. Ließe man in seinem Zähler k und h zugleich wachsen, so würde er offenbar größer wie vorher. Ließe man das eine größer, das andre kleiner werden, wo sein neuer Zähler als $(h + \mathfrak{h})\nu + (k - \mathfrak{k})\sigma$ erschiene, so kann auch dieses nicht dem vorigen Zähler $h\nu + k\sigma$ gleich seyn, weil sonst $\mathfrak{h}\nu = \mathfrak{k}\sigma$ seyn müßte, welches, da $\mathfrak{h}$ kleiner als σ, $\mathfrak{k}$ kleiner als ν seyn soll, σ und ν aber Primzahlen unter sich sind, unmöglich ist. Eben so wenig kann die Differenz von irgend zwey Werthen, die, für beliebige $h < \sigma$ und $k < \nu$, der obige Bruch annehmen mögte, jemals eine ganze Zahl werden. Dann sey sein erster Werth $\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}$, sein zweyter $\frac{(h \pm \mathfrak{h})\nu + (k \pm \mathfrak{k})\sigma}{\nu\sigma}$, so ist der Unterschied zwischen beyden $\frac{\pm(\mathfrak{h}\nu \pm \mathfrak{k}\sigma)}{\nu\sigma} = \pm\left(\frac{\mathfrak{h}}{\sigma} \pm \frac{\mathfrak{k}}{\nu}\right)$. Sollte dieses eine ganze Zahl i geben, so würde $\pm \frac{\mathfrak{h}}{\sigma} = i \pm \frac{\mathfrak{k}}{\nu}$ seyn. Das letzte läßt sich durch Addition oder Subtraction auf einen Bruch, der gleichfalls ν zum Nenner hat, bringen. Da aber σ und ν Primzahlen unter sich sind, so können zwey Brüche, von denen der eine echt ist, welches also auch der andre seyn müßte, wenn jener ν, dieser σ zum Nenner hat, nicht identisch seyn.

Wofern wir also in dem Ausdruck für das verlangte vieldeutige Product alle möglichen Specialisirungen vornehmen, so erhalten wir für $\left(\frac{h\nu + k\sigma}{\sigma\nu}\right) 2\pi$, (weil die Anzahl der Werthe, welche er annehmen kann, und deren jeder bewiesenermaaßen von dem andern verschieden ist, durch $\sigma\nu$ ausgedrückt wird, auch keiner derselben von einem der andern um irgend ein

Vielfaches der Zahl 2π verschieden seyn kann) für den Ausdruck:

$$\cos\left(\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}\right)2\pi + \left[\sin\left(\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}\right)2\pi\right]\sqrt{-1}$$

der Zahl nach $\sigma\nu$ durchaus von einander verschiedene Werthe, deren jeder eine Specialisirung der Andeutung $1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}} \cdot 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$ genannt werden darf. Alle diese Werthe würden, unter p die Andeutung jeder möglichen ganzen Zahl verstanden, unter dem allgemeinen Schema:

$$\cos\frac{p}{\nu\sigma} + \left(\sin\frac{p}{\nu\sigma}\right)\sqrt{-1} = e^{\frac{p}{\nu\sigma}\sqrt{-1}}$$ enthalten seyn.

Da aber dieses überhaupt deren nur $\nu\sigma$ enthalten kann, die aus dem noch einfacheren Schema $1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu\sigma}\right)}}$ sämmtlich hervorgehn, und eine Zahl von $\nu\sigma$ verschiedenen Werthen aus den Specialisirungen, die wir in Absicht auf den Zähler des uns gegebenen Bruchs von der Form $\frac{p}{\nu\sigma}$ vorgenommen haben, sofern es die Absicht $1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}} \cdot 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$ zu berechnen erforderte, bereits abgeleitet sind, so dürfen wir behaupten, daß eben dadurch Alles, was $1^{\left(\frac{1}{\nu\sigma}\right)}$ von verschiedenen Werthen darbieten kann und muß, enthalten sey, daß also $1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}} \cdot 1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu\sigma}\right)}}$, daß mithin $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}\ A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right)} \cdot 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu\sigma}\right)}}$ sey. Da nun unläugbar, wenn ν und σ keinen Factor gemeinschaftlich haben, $A^{\overline{\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right)}} = A^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}} \cdot 1^{\overline{\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right)}}$. Da ferner

der zweyte Factor dieses Ausdrucks $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\sigma}\right)}}$ $= 1^{\overline{\left(\frac{\nu+\sigma}{\sigma\nu}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu\sigma}\right)}}$ ist, so darf $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\overline{\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}}$ gesetzt werden. Im zweyten Falle, wo die Nenner ν und σ einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, der bey dem einzelnen Bruche nicht gehoben werden kann, $\nu = ſn$, $\sigma = f.ſ$ wird der Bruch $\frac{h\nu + k\sigma}{\nu\sigma}$, diesen im Zähler und Nenner gleichfalls führen, mithin, denselben in beyden gehoben, auf $\left(\frac{hn + kſ}{fnſ}\right)$ zurückkommen, und alsdann nur soviel verschiedene Werthe darbieten, als $fnſ$ Einheiten hat, so daß in diesem Falle der ganze Inbegriff derselben durch $1^{\overline{\left(\frac{1}{fnſ}\right)}}$ angedeutet werden kann. Aber es wird, weil $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$ und $1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}$; $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\sigma}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{\sigma+\nu}{\nu\sigma}\right)}}$ $= 1^{\overline{\left(\frac{ſ+n}{fnſ}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{fnſ}\right)}}$. Es besteht also auch für ihn die nemliche Regel, und es ist allgemein bewiesen, daß die Formel $A^{\frac{m}{n}} . A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$ vollkommen gültig sey, wenn man aus den generellen Werthen der Factoren die des Products abzuleiten beabsichtigt, und daß namentlich $1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . 1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$ $= 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}}$.

Diese Regel für die Multiplication von Potenzen mit gebrochenen Exponenten als vieldeutigen Größen, übrigens vollkommen allgemein, erfordert nur in einem Falle eine

nähere Bestimmung, wenn die Factoren durch identische Ausdrücke gegeben werden. Möge, weil hier darauf nichts ankommt, der Bruch $\frac{m}{n}$ auf seiner kleinsten Benennung stehn, und das Product $A^{\left(\overline{\frac{m}{n}}\right)} . A^{\left(\overline{\frac{m}{n}}\right)} = A^{\frac{2m}{n}} . 1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)} . 1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)}$ verlangt werden. Denkt man sich hier die beyden Factoren $1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)}$ als identisch, weil sie durch identische Zeichen angedeutet sind, so daß man also $1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)} . 1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)} = 1^{\left(\overline{\frac{2}{n}}\right)}$ zu setzen sich berechtigt hält, so ist offenbar, daß man zwar ihre Vieldeutigkeit nicht aufhebt, aber die des einen Factors an die des andern bindet, so daß, wenn für den einen sein erster, zweyter, dritter Werth genommen ist, gleichzeitig für den andern die nemlichen Werthe gewählt werden müssen, mithin jedesmal Producte aus zwey gleichen Factoren, oder Quadrate zu Stande kommen. Nimt man hingegen an, daß, allgemeiner, jeder Werth des ersten $1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)}$, mit jedem des andern multiplicirt werden soll, wobey dann die Idee, daß jedes dieser Producte ein Quadrat genannt werden dürfe, unstatthaft wird, mithin in solchem Falle nicht $1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)} . 1^{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)} = 1^{\left(\overline{\frac{2}{n}}\right)}$ gesetzt werden darf, so ist dieses eine zweyte, von jener ersten gänzlich verschiedene Voraussetzung. Ihre Resultate werden nicht immer zusammenfallen. Was die erste betrifft, wo man $1^{\left(\overline{\frac{2}{n}}\right)}$ erhält, so ist bewiesen, daß dieser Ausdruck nur dann n verschiedene Werthe gebe, wenn sich der Zähler 2, gegen den Nenner n nicht heben läßt, im gegentheiligen Falle nur halb soviel bringen wird. Was aber den zweyten anlangt, wo man jeden Werth

des ersten $1^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ mit jedem des zweyten multipliciren soll, so kann eine leichte ursprüngliche Betrachtung zeigen, daß daraus jedesmal n verschiedene Resultate entspringen müssen.

Denkt man sich alle die verschiedenen Werthe, welche die Form $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2m\pi}{n} + \left(\sin\frac{2m\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$ annehmen kann, als Glieder einer Reihe, so darf man behaupten, daß dieselben Glieder, nur in einer andern Folge, wieder zum Vorschein kommen, wenn sie sämmtlich mit irgend einem unter ihnen multiplicirt werden. Es sey, unbestimmt, das kte unter ihnen dasjenige, wodurch man die übrigen multiplicirt. So ist der allgemeine Ausdruck für das Product $\cos\frac{2(m+k)\pi}{n} + \left(\sin\frac{2(m+k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$. Aus ihm erhält man die Reihe aller Producte, wenn man für m die Zahlen 0, 1, 2, ... nach der Ordnung setzt. So ist also nun das erste Glied, $\cos\frac{2k\pi}{n} + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$, was für $\sqrt[n]{1}$ das kte war; alle, welche vorher auf das kte folgten, werden jetzt in ungestörter Ordnung nach dem ersten erscheinen müssen. An dasjenige, was vorher das letzte war, und welches jetzt das $n-(k-1)$te ist, wird sich das $n-k$te, mithin dasjenige, was vorher das erste war, wieder anschließen, und sich daran nach der Ordnung das vorherige zweyte, dritte, u. s. w., bis zum $k-1$ten anreihen, welches die neue Reihe beschließen wird. Setzte man also die verschiedenen Werthe, welche $\sqrt[n]{1}$ haben kann, im Kreise herum neben einander, so würde die Reihe der Producte, welche herauskommen, wenn man mit einem von ihnen, dem kten, sie alle multipliciren wollte, sogleich dadurch erhalten werden, wenn man vom kten Gliede des Ringes den Anfang machte, und nun, in der

vorigen Ordnung, in demselben herumginge, bis man auf den Anfang zurückgekommen wäre. Unfehlbar ist also, die Factoren als vieldeutig, aber in dieser Hinsicht ganz unabhängig von einander gedacht, $\overline{\sqrt[n]{1}} . \overline{\sqrt[n]{1}}$, sofern es auf Verschiedenheit der darunter enthaltenen Ausdrücke ankommt, identisch mit $\overline{\sqrt[n]{1}}$.

Dieser Satz, für zwey solche Factoren bewiesen, gilt von selbst für jede noch so große Anzahl derselben. Man dürfte also sagen: Wenn der Factoren, jeder $= \overline{1^{\left(\frac{1}{n}\right)}}$ an Zahl n sind, und man ihr Product unter der Voraussetzung berechnen soll, daß die Vieldeutigkeiten der Factoren, ungeachtet jeder von ihnen im Allgemeinen durch dasselbe Zeichen angedeutet ist, völlig unabhängig von einander sind, und bey jedem, ohne auf die andern Rücksicht zu nehmen, specialisirt werden können, so ist die Anzahl der unter der Andeutung ihres Products enthaltenen einzelnen Werthe allemal n, und sie sind unter dem Schema $\overline{1^{\left(\frac{1}{n}\right)}}$ enthalten, aber dann darf man das Product im Allgemeinen keine Potenz nennen, und mit dem Zeichen einer solchen belegen. Will man aber unter den Factoren in der That in jedem einzelnen Falle identische Zahlen verstehn, wobey jeder vieldeutig bleiben kann, nur daß fortwährend die Vieldeutigkeit aller auf gleiche Weise specialisirt werde, so darf man das Product durch $\overline{1^{\left(\frac{1}{n}\right)}}^{n} = \overline{1^{\left(\frac{n}{n}\right)}}$ bezeichnen; es wird aber dann nie Etwas anders als 1 werden können.

Man wird überhaupt bey Multiplicationen von Factoren, deren Vieldeutigkeit durch ein identisches Zeichen ausgedrückt ist, zu entscheiden haben, in welcher Voraussetzung, rücksicht=

lich ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, sofern sie sich specialisiren, gerechnet werden soll; in jedem andern Falle bedarf es solcher Bestimmung nicht.

2. Die zweyte Hauptregel der Potenzenrechnung $A^{\frac{m}{n}} : A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}$ bedarf nach der obigen Betrachtung keines Beweises mehr, um ihre Gültigkeit auch auf die generellen Ausdrücke $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} : A^{\overline{\left(\frac{r}{n}\right)}} = A^{\overline{\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)}}$ zu erstrecken. Denn der Satz, daß $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\overline{\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right)}}$ sey, ist auch für den Fall, wo der eine oder andre der gebrochenen Exponenten negativ wäre, dargethan, und bloß die Aenderung, wo man statt $+ r$ substituirt $- r$, bringt die Aufgabe $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$ auf die $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} : A^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$ zurück.

Sind Dividend und Divisor identisch bezeichnet, sofern es auf Vieldeutigkeit ankommt, so wird auch hier eine anderweitige Bestimmung erfordert, um ein sicheres Resultat zu gewinnen. $1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}} : 1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}$, wird bloß 1 bedeuten, wenn die Vieldeutigkeiten von Dividend und Divisor identisch im Einzelnen seyn sollen; es wird $1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}$ geben können, wenn jene als vollkommen unabhängig von einander gedacht werden.

Selbst in dem Falle, wo die Potenzen mit gebrochenem Exponenten, welche durch Multiplication oder Division verbunden werden sollen, verschiedene Wurzeln haben, würde in Hinsicht der Vieldeutigkeit in ihnen und in ihrem Resultat die obige Betrachtung zur Norm dienen $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . B^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\frac{m}{n}} . B^{\frac{r}{s}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} . 1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$

$= A^{\frac{m}{n}} . B^{\frac{r}{s}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}}$, und eben so $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} : B^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}}$ $= A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{r}{s}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} : 1^{\overline{\left(\frac{r}{s}\right)}} = A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{r}{s}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}-\frac{r}{s}\right)}}$.

3. Die dritte Hauptregel der Potenzenrechnung: $\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^q$ $= A^{\frac{mq}{n}}$ hat sich, als völlig zulässig, sofern $A^{\frac{m}{n}}$ als vieldeutig betrachtet werden soll, schon bey der Untersuchung über die allgemeine Bedeutung der Potenzen mit gebrochenen Exponenten dargethan. Ist $m = f.\mu$, $n = f.\nu$, so bedeutet $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}$ soviel als $A^{\frac{m}{n}} . 1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}}$. Soll dieses zur qten Potenz erhoben werden, und verlangt man alle Werthe, die $1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}q}$ haben könnte, so wird, falls $\nu = gn$, und $q = gq$ seyn sollte, $1^{\overline{\left(\frac{1}{\nu}\right)}q} = 1^{\overline{\left(\frac{q}{\nu}\right)}} = 1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}$, und also $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}q} = A^{\frac{mq}{n}}$ $. 1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}$ seyn. Aber $1^{\overline{\left(\frac{mq}{n}\right)}}$, sofern es auf Vieldeutigkeit des Ausdrucks ankommt, weil $\frac{mq}{n}$, der Annahme gemäß, $\frac{f.\mu.g.q}{f.g.n}$ $= \frac{\mu.q}{n}$ wo Zähler und Nenner keinen Factor weiter gemein haben, ist gleichfalls $1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}$. Mithin gilt die Regel: $\left(A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)^q$ $= A^{\overline{\left(\frac{mq}{n}\right)}}$ unbedingt.

4. Die vierte Hauptregel der Potenzenrechnung: $\sqrt[r]{\left(A^{\frac{m}{n}}\right)}$ $= A^{\frac{m}{nr}}$ läßt sich gleichfalls in Beziehung auf die Vieldeu-

tigkeit der Potenzen mit gebrochenen Exponenten als unbedingt gültig nachweisen.

Daß $\frac{m}{n}$ auf der kleinsten Benennung stehe, auch m und n keinen Factor gemein haben, wird man voraussetzen dürfen, da es, ohne die Vieldeutigkeit solcher Ausdrücke zu affiziren, immer an ihnen bewerkstelligt werden kann. Nun ist $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} = A^{\frac{m}{n}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}} = A^{\frac{m}{n}} . 1^{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}} = A^{\frac{m}{n}}$. $\left[\cos \frac{h}{n} 2\pi + \left(\sin \frac{h}{n} . 2\pi\right) \sqrt{-1}\right]$.

In diesem Ausdrucke soll man für h alle ganze Zahlen von o bis an n setzen. Und es wird ferner verlangt, daß aus jedem einzelnen Werthe, den er dadurch angenommen hat, die Wurzel des $r$ten Grades gezogen werde. Geschehe dieses unbestimmt am $h$ten Werthe. Es ist aber die bekannte Grundregel der allgemeinen Wurzelausziehung, daß man, um alle Resultate für die Wurzelausziehung des $r$ten Grades zu erhalten, nur den Fundamentalwerth derselben zu suchen, und ihn mit $\sqrt[r]{1}$ zu multipliciren hat. Der Fundamentalwerth für die Wurzel des $r$ten Grades aus jenem Ausdruck ist $A^{\frac{m}{rn}} \left[\cos \frac{h}{nr} . 2\pi + \left(\sin \frac{h}{nr} . 2\pi\right) \sqrt{-1}\right]$.

Dieser also müßte mit $\sqrt[r]{1} = \cos \frac{k}{r} 2\pi + \left(\sin \frac{k}{r} . 2\pi\right) \sqrt{-1}$ (wo für k alle ganze Zahlen von o bis an r gesetzt werden dürften) multiplicirt werden. Das Product gibt

$$A^{\frac{m}{nr}} \left[\cos \left(\frac{h + kn}{rn}\right) 2\pi + \left[\sin \left(\frac{h + kn}{rn}\right) 2\pi\right] \sqrt{-1}\right].$$

Es fragt sich, wieviel verschiedene Werthe dieser Ausdruck darbietet, und ob er nicht vereinfacht werden kann.

Sie entstehn alle aus den Werthen, welche die Form $\frac{h + kn}{rn}$ annimt, indem man in dieser für h alle ganze Zahlen von o bis an n, für k alle von o bis an r setzt. Die Gesammtzahl von diesen wird also rn seyn.

Alle Werthe der Form $\frac{h + kn}{rn}$ werden verschieden von einander seyn. Denn wollte man ein geändertes h durch h + ɧ, ein geändertes k durch k — ƙ andeuten, und annehmen, es könne $\frac{h + kn}{rn} = \frac{h + ɧ + (k - ƙ)n}{rn}$ seyn, so würde daraus folgen, daß ɧ = ƙn seyn müsse, welches, da ɧ durchaus unter n bleiben soll, nicht möglich ist.

Jeder Werth von $\frac{h + kn}{rn}$ ist nothwendig ein echter Bruch, denn sollte er kein echter Bruch, mithin entweder = oder > 1 seyn, so wäre h + kn = oder > rn, mithin h = oder größer als (r — k)n, da aber h immer kleiner als n, hingegen (r — k)n jederzeit ein positives Vielfaches von n bedeutet, so würde ein Widerspruch vorhanden seyn, sobald eine solche gegentheilige Annahme gemacht würde. Werden folglich in der Form $\frac{h + rn}{rn}$ für h allmälig alle ganze Zahlen von o bis an n, für k alle von o bis an r gesetzt, so entspringen aus ihr lauter echte Brüche, der Zahl nach rn, deren Zähler durchaus verschieden werden, mithin alle echte Brüche, die unter dem Nenner rn möglich sind. Man hätte also, was sich aus ihr entwickelt, kürzer durch das Schema $\frac{l}{rn}$ andeuten dürfen, unter der Bedingung, daß für l alle ganze Zahlen von o bis an rn gesetzt werden

sollen. Der imaginäre Factor im Ausdruck des Products würde alsdann $\cos\frac{1.2m\pi}{rn} + \left(\sin\frac{1.2m\pi}{rn}\right)\sqrt{-1}$ geworden seyn, welches offenbar den Ausdruck für jeden Werth von $\sqrt[\overline{rn}]{1}^{m}$ darbietet, so daß:

$$\sqrt[r]{\left(A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)} = A^{\frac{m}{nr}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{rn}\right)}}$$ gefunden ist.

Setzte man sogleich $\sqrt[\overline{r}]{\left(A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)} = A^{\overline{\left(\frac{m}{nr}\right)}}$, so würde, da $A^{\overline{\left(\frac{m}{nr}\right)}} = A^{\frac{m}{nr}} . 1^{\overline{\left(\frac{m}{nr}\right)}}$, dies offenbar identisch dasselbe geben. Es bedarf wohl kaum einer Bemerkung, daß auch dann, wenn an dem anfänglichen Ansatze der Bruch $\frac{m}{n}$ nicht auf seiner kleinsten Benennung gestanden, oder bey seiner Division durch r ein Heben gemeinschaftlicher Factoren möglich gewesen wäre, dieses auf die Endformel ohne allen Einfluß geblieben seyn würde. Hätten m und n einen Factor f gemein gehabt, $m = f\mu$, $n = f\nu$, so würde $A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}$ nur ν verschiedene Werthe, angedeutet durch $A^{\overline{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)}}$ geben. Hätten ferner r und μ einen gemeinschaftlichen Factor g enthalten, $r = g.r$ und $\mu = g.m$, so würde $\sqrt[r]{\left[A^{\overline{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right]}$ nur $r\nu$ verschiedene Werthe, angezeigt durch $A^{\overline{\left(\frac{m}{\nu r}\right)}}$, annehmen können. Der Ausdruck $A^{\overline{\left(\frac{m}{nr}\right)}}$ reduzirt sich von selbst auf das Nemliche, wenn sein Exponent, wie es ohne Einfluß auf seine Vieldeutigkeit geschehn kann, den kleinsten Ausdruck annimt.

Der Vollständigkeit wegen mag noch hinzugefügt werden, daß aus unmittelbarer Verbindung der dritten und vierten Regel, in ihrem gegenwärtigen Umfange, auch der Satz: $\left(A^{\left(\frac{\overline{m}}{n}\right)}\right)^{\left(\frac{\overline{q}}{r}\right)} = A^{\left(\frac{\overline{mq}}{nr}\right)}$ entspringt.

Und so sind die Hauptregeln der Potenzenrechnung, die bey ihrer elementarischen Ableitung für Potenzen mit gebrochenen Exponenten nur in dem Fall, wo diese eine reelle positive unzweydeutige Zahl anzeigen, als gültig bewiesen werden, zu völlig allgemeinen erhoben, auch alsdann unfehlbar richtig zu nennen, wenn solche Potenzen als vieldeutige Ausdrücke betrachtet werden, deren vieldeutiges Resultat in allgemeiner Formel ausgesprochen werden soll.

Vierzehntes Kapitel.

Umbildung entwickelter Formen durch Substitution.

Es ist oft der Fall, wenn der Werth einer Größe durch einen entwickelten arithmetischen Ausdruck vermöge einer andern dargestellt werden soll, daß sich dieser Forderung nicht unmittelbar Genüge leisten läßt. Die erste Größe wird durch eine gewisse dritte, y durch z gegeben. Man kann sie folglich vermöge der vorhergehenden Lehren, in eine nach Potenzen von dieser dritten, z, fortschreitende Form entwickeln. Die dritte selbst wird durch die zweyte, z durch x, ausgedrückt. Man kann also auch für sie, z, eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe bekommen. Es ist alsdann also noch nothwendig, die erste Reihe für y, welche Potenzen von z enthält, zu nehmen, in jedem ihrer Glieder den Werth von z, welchen die zweyte Reihe darstellt, zu substituiren,

und alle Resultate in eine Summe zusammenzuziehn. Dadurch findet sich, wie verlangt wurde, y unmittelbar nach Potenzen von x entwickelt.

Die Arbeit wird mühsam seyn, aber lediglich auf die Anwendung des polynomischen Lehrsatzes zurückkommen. Sie ist nur dann einer Zusammenziehung fähig, wenn die gegebenen Reihen so beschaffen sind, daß aus der Substitution der einen in die andre eine dritte mit regelmäßig fortschreitenden Exponenten erwächst. Wir haben vor allen Dingen zu untersuchen, wann und unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten wird.

Es sey also, in völliger Unbestimmtheit aller Zeichen

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$$

und ebenso

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + d} \ldots + \overset{r}{B} x^{a + rd}.$$

Verlangt man y durch x entwickelt dargestellt, so muß man die Reihe für y nehmen, in jedem ihrer Glieder statt z seinen Werth, wie ihn die zweyte Reihe darbietet, substituiren, das Resultat jeder Substitution durch den polynomischen Lehrsatz entwickeln, und alle dadurch allmälig entstandene Formen am Ende in eine Summe zusammenziehn.

Nun ist bekannt, daß jede Potenz einer Form, wie $z = Bx^{a} + Bx^{a+d} \ldots$, in Absicht auf die Exponenten in den successiven Gliedern ihres berechneten Werths derselben Progression, wie die Grundform z selbst, folgen muß.

Aber die Exponenten der Anfangsglieder werden in verschiedenen Potenzen von z verschieden seyn. Mithin wird man keinesweges im Allgemeinen behaupten dürfen, daß verschiedene Potenzen von z Reihen geben müssen, bey denen, für jedes Glied der einen, ein mit gleichem Exponenten versehenes Glied der andern gefunden werden kann, wel-

ches sich dem gemäß durch würkliche Addition mit ihm vereinigen läßt. Man substituire im Anfangsgliede der Reihe für y, statt z seinen Werth, d. h. setze in Az^{α} für z die gegebene Reihe. Es entsteht eine neue, die im Anfangsgliede $x^{a\alpha}$; allgemein, im hten nach ihm $x^{a\alpha + hd}$ enthalten wird. Man nehme ferner unbestimmt das rte Glied der Reihe für y, $= \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$, und unterziehe es der nemlichen Substitution. Es entsteht aus ihr eine neue Reihe, die mit $x^{\alpha a + ar\delta}$ anheben, und durch Exponenten, die allmälig immer um d größer werden, fortlaufen wird. Sollen die Glieder der letzten Reihe mit denen der ersten in würkliche Vereinigung treten, so muß es unter den Gliedern der ersten irgend eines, unbestimmt das hte, geben, welches mit dem Anfangsgliede der letzten gleichen Exponenten besitzt. Denn da übrigens die Progression der Exponenten in beyden Reihen dieselbe ist, so werden alsdann die nachfolgenden Glieder in ihnen durchaus gleiche, im gegentheiligen Falle aber durchaus verschiedene Exponenten besitzen, mithin alsdann an gar keine eigentliche Vereinigung der beyden Reihen zu denken seyn. Es muß also, falls man eine solche verlangt, möglich seyn $a\alpha + hd = a\alpha + ar\delta$ zu setzen, so daß h irgend eine ganze positive Zahl seyn kann; d. h. es muß $\frac{ar\delta}{d}$ irgend eine positive Zahl, oder noch kürzer, da r eine unbestimmte ganze Zahl bedeutet, es muß $\frac{a\delta}{d}$ irgend eine ganze positive Zahl, mithin, wenn wir unter m eine solche verstehn, es muß $\frac{a\delta}{d} = m$, oder $d = \frac{a\delta}{m}$ seyn.

Es wird also nur der Fall, bey der Entwicklung durch Substitution, einer Zusammenziehung des Resultats, und einer Darstellung desselben durch eine Reihe, worin die Ex-

ponenten eine arithmetische Progression beobachten, fähig seyn, bey welchem die beyden gegebenen Reihen, falls d, α, δ, willkührliche Größen, m aber eine ganze positive Zahl bedeutet, die folgende Form haben:

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} + \ldots$$

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + \frac{a\delta}{m}} \ldots \overset{r}{B} x^{a + \frac{ra\delta}{m}} + \ldots$$

Alsdann wird aus der Substitution eine neue Reihe für y entstehn, die im Anfangsgliede aα enthält, und in welcher die Exponenten regelmäßig um $\frac{a}{m}\delta$ zunehmen.

In dieser Allgemeinheit der Formen aber würde die würkliche Berechnung der Coeffizienten wenig Brauchbarkeit und Interesse gewähren. Wir wollen also zu etwas particuläreren Fällen fortschreiten.

Soll, bey der Substitution des Werths von z, in die Reihe für y, ein regelmäßiges Zusammenfließen der Reihen, die aus den successiven Gliedern von y entstehn, erfolgen, so daß das Anfangsglied der zweyten sich sogleich mit dem ersten Gliede nach dem anfänglichen in der ersten, allgemein, das Anfangsglied der rten Reihe mit dem rten Gliede der ersten durch würkliche Addition vereinigen läßt, so muß $rd = ar\delta$, mithin $d = a\delta$ seyn, mithin die beyden gegebenen Reihen folgende Form besitzen:

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$$

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + a\delta} \ldots \overset{r}{B} x^{a + ar\delta}.$$

Wir wollen bey diesem Falle verweilen, um die Coeffizientenbestimmung für das Resultat, ganz im Allgemeinen, auf ihre Regel zurückzubringen.

Hier wird aber, um Weitläuftigkeit zu vermeiden, eine Abkürzung der Bezeichnung nothwendig. Wenn eine Reihe,

wie jetzt die für z, zu successiv verschiedenen Potenzen erhoben werden soll, so ist es die kürzeste Art, nicht allein ihre Coeffizienten, sondern auch die aller ihrer Potenzen durch das nemliche Zeichen, etwa Z, anzudeuten. Ein übergeschriebener Index kann die Zahl des Coeffizienten; ein auf der linken Seite aufwärts beygesetzter Exponent den Grad der Potenz, welcher der Coeffizient gehören soll, bestimmen. Die ganze Bezeichnung ist der für Binomialcoeffizienten vollkommen analog. So würde also

$$z^1 = {}^1Z x^a + {}^1\overset{1}{Z} x^{a + a\delta} \ldots + {}^r\overset{r}{Z} x^{a + ra\delta}$$

und allgemein

$$z^m = {}^mZ x^{am} + {}^m\overset{1}{Z} x^{am + a\delta} \ldots + {}^m\overset{r}{Z} x^{am + ar\delta} \ldots$$

Mit dieser Bezeichnung ausgerüstet, werden wir leicht das Resultat der ganzen Substitution in völliger Allgemeinheit darstellen können.

Die resultirende Reihe beginnt, wie wir wissen, mit $x^{a\alpha}$ und hat in ihrem $r$ten Gliede $x^{a\alpha + ra\delta}$. Fragen wir also nach dem Coeffizienten, welchen dieses $r$te Glied bekommen wird.

Man setzt allmälig bey der Substitution in jedes Glied des Werths von y, für die Potenz von z, welche es enthält, die gebührende Reihe. Solange die Zahl eines solchen Gliedes kleiner ist als r, hebt die aus ihm entspringende Reihe mit einem Gliede an, welches einen niedrigeren Exponenten als $a\alpha + ra\delta$ enthält, muß also zu folgenden Gliedern fortgesetzt werden, bis sich in ihr ein Glied mit diesem Exponenten zeigt, gibt also gewiß einen Theil her, welcher in $x^{a\alpha + ra\delta}$ multiplicirt ist. Sobald aber die Zahl des Gliedes, in dem Werthe von y größer ist als r, hebt die aus ihm durch Substitution entspringende Reihe mit einer höheren Potenz von x als die vorliegende an; es kann also aus

diesen Gliedern nichts gezogen werden, was in die jetzt gesuchte Summe gehörte. So wird also der Coeffizient zu $x^{a\alpha + ra\delta}$ in Resultate der Substitution eine zusammengesetzte Größe, deren kter Theil entsteht, wenn man das kte Glied der Reihe für y, d. h. $\overset{k}{A} z^{\alpha + k\delta}$, nimt; in ihm für z seinen Werth, d. h. die Potenz des Grades $\alpha + k\delta$ von der Reihe $z = Bx^a + \overset{r}{B} x^{a + a\delta}$.. setzt, und dasjenige Glied dieser Entwicklung, in welchem $x^{a\alpha + ra\delta}$ enthalten ist, heraushebt.

Nun fängt diese, zuletzt geforderte Potenz der Reihe z mit $x^{a\alpha + ka\delta}$ an; es ist also das Glied von ihr, dessen Zahl r - k ist, welches man aus ihr zu nehmen haben wird, weil die in ihm vorkommende Potenz $x^{a\alpha + ka\delta + (r-k)a\delta}$ $= x^{a\alpha + ra\delta}$ seyn wird. Sein Coeffizient ist, nach unsrer abgekürzten Bezeichnung $\overset{\alpha + k\delta\ \ r\text{-}k}{Z}$; er also, mit dem Factor multiplicirt, welchen diese Potenz von z, woraus er hervorgehoben wurde, in der Reihe für y führte, d. h. mit $\overset{k}{A}$, gibt den kten Theil des Coeffizienten zu $x^{a\alpha + ra\delta}$, welcher Coeffizient also durch $\overset{0..r}{\Sigma} (\overset{k}{A} . \overset{\alpha + k\delta\ \ r\text{-}k}{Z})$ ausgedrückt werden kann.

Es würde leicht seyn, diesen allgemeinen Ausdruck in einen combinatorischen umzusetzen, da in ihm nur einzelne Coeffizienten aus bestimmten Potenzen der Reihe, wodurch der Werth der Größe z gegeben ist, verlangt werden. Da indessen in dieser Allgemeinheit keine Zusammenziehung des ganzen Ausdrucks möglich ist, so hat eine solche fernere Zurückführung wenig Interesse. Soviel aber mag im Allgemeinen abstrahirt werden, daß jeder Coeffizient der Reihe, welche entspringt, wenn man in

$$y = \overset{0}{A} z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} + \ldots$$

für die Größe z den Werth

$$z = Z x^{a} + \overset{1}{Z} x^{a + a\delta} \ldots + \overset{r}{Z} x^{a + ra\delta} + \ldots$$

substituirt, zu seiner Bildung gerade so viele von den Coeffizienten der beyden gegebenen Reihen gebraucht, als sein eigener Index Einheiten enthält. Der $r$te Coeffizient dieser Reihe ist, wie eben gefunden, ${}^{0 \ldots r}\Sigma\,(\overset{k}{A}\,.\,{}^{\alpha + k\delta}\overset{r\text{-}k}{Z})$. Offenbar also, wenn in ihm, wie er verlangt, für k alle Werthe von o bis r gesetzt werden, gibt er erstlich in seinen einzelnen Theilen alle Coeffizienten der ersten Reihe von A bis $\overset{r}{A}$. Er fordert aber außerdem, in dem zweyten Factor ${}^{\alpha + k\delta}\overset{r\text{-}k}{Z}$, von gewissen Potenzen der Reihe für z, einzelne Coeffizienten, und zwar von einer unter ihnen den $r$ten, von den andern hingegen Coeffizienten geringerer Zahl. Nun aber ist es aus dem Vorhergehenden bekannt, daß, welches auch der Exponent der Potenz seyn möge, worauf eine beliebige Reihe erhoben werden soll, jeder Coeffizient der Potenz nur so viele von den ersten der Grundreihe zu seiner Zusammensetzung fordert, als seine eigne Zahl Einheiten enthält. Es mag also der Ausdruck ${}^{\alpha + k\delta}\overset{r\text{-}k}{Z}$, durch Specialisirung von k, eine Bedeutung annehmen, welche man will, so wird doch allemal Etwas in ihm gefordert, was, als Coeffizient einer Potenz von der Reihe für z, dessen Zahl nicht über r hinausgehn kann, auch nur aus den ersten r Coeffizienten eben dieser Reihe für z zusammengesetzt seyn wird. Es ist also offenbar, daß in dem ganzen Ausdrucke des $r$ten Coeffizienten der Reihe, welche aus der Substitution entspringt, nur soviele von denen der beyden gegebenen Reihen vorkommen, als seine Zahl Einheiten in sich faßt. Will man, noch etwas genauer in die Bildung dieses Coeffizienten eingehend, fragen, auf welche Weise in

ihm die rten Coeffizienten der beyden gegebenen Reihen, vorzugsweise betrachtet, vorkommen, so kann leicht die Antwort gefunden werden: beyde nur auf die erste Potenz erhoben. Von der Reihe für y ergibt sich dies auf den ersten Anblick aus der Formel $o..r\Sigma(\overset{k}{A}.{}^{\alpha + k\delta}\overset{r\cdot k}{Z})$, denn jeder ihrer Coeffizienten wird nur einzeln, mit einem Factor, der aus der zweyten Reihe für z genommen ist, multiplicirt, gesetzt. Vollends, wenn $k = r$, wie hier angenommen werden muß, wird der Factor neben $\overset{r}{A}$ einfach genug ${}^{\alpha + r\delta}Z = Z^{\alpha + r\delta}$. Es erscheint also der rte Coeffizient der ersten Reihe nur mit einer bestimmten Potenz vom Anfangscoeffizienten der zweyten multiplicirt. Von der Reihe für z ist das Nemliche nicht schwer zu beweisen. Die Formel enthält, man setze für k, was man will, nur einen Theil, in welchem der rte Coeffizient der Reihe für z vorkommen kann. Es ist der allererste, für $k = o$, wo sie sich in $A.{}^{\alpha}\overset{r}{Z}$ verwandelt. Wenn man aber eine Reihe wie $z = Zx^a + \overset{1}{Z}x^{a + a\delta} .. + \overset{r}{Z}x^{a + ra\delta}$, auf eine beliebige Potenz, hier des Grades α, erhebt, und deren rtes Glied verlangt, so gibt es in der Reihe der Producte, woraus sich dessen Coeffizient zusammensetzt, nur eines, in welchem $\overset{r}{Z}$ vorkommt und zwar ist dasselbe $\alpha Z^{\alpha - 1}.\overset{r}{Z}$. Es ist also $\alpha.A.Z^{\alpha - 1}.\overset{r}{Z}$ der einzige Theil im rten Coeffizienten der aus dem Substituiren entsprungenen Reihe, in welchem der rte Coeffizient der zweyten von den für die Substitution gegebenen Reihen vorkommt. Wir werden von dieser Bemerkung im folgenden Capitel für eine sehr wichtige Untersuchung Gebrauch machen.

3. Wenn es darauf ankommt, die aus der Substitution entspringende Reihe independent entwickelt zu erhalten, so ist

unfehlbar der vorhin betretene Weg der kürzeste und bequemste. Sollte man aber ihre einzelnen Glieder allmälig berechnen, und also die Coeffizienten derselben recurrirend ableiten, so ließe sich ein einfacheres Verfahren an die Hand geben, wobey jedesmal nichts weiter als der binomische Lehrsatz gebraucht werden müßte. Um in der Reihe:

$$y = A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} \ldots$$

für die Größe z die Reihe:

$$z = B x^{a} + \overset{1}{B} x^{a + d} + \ldots \overset{r}{B} x^{a + rd} \ldots$$

zu substituiren, nehme man den Inbegriff aller folgenden Glieder in der zweyten Reihe zuerst als eine einzige neue Hauptgröße an, setze also $z = B x^{a} + u$. Diese Substitution, sogleich durch den binomischen Lehrsatz ausführbar, wird eine neue Form hervorbringen, die nach Potenzen von u fortschreitend geordnet werden mag. In ihr setze man wieder für u eine zweytheilige Größe, deren erster Theil das würkliche erste Glied der Reihe, die durch u bezeichnet ist, seyn mag, der zweyte hingegen den Inbegriff aller folgenden andeute: $u = B x^{a + d} + v \ldots$ Auf diesem Wege fahre man fort, die Glieder der Reihe für z, eines nach dem andern, hervorzuziehn, und in die Entwicklung eintreten zu lassen. Die vollständige Ableitung dieses Verfahrens würde aber noch viel weitläuftiger als die des ersten, ausfallen müssen, und eine wahre, arithmetische Recursion zwischen den Coeffizienten des Resultats würde dennoch nicht gefunden werden, sondern statt ihrer eine bloß combinatorische zwischen den einzelnen Formen, wodurch sich jene Coeffizienten andeuten, solange man unbestimmte Zeichen gebraucht. Es mag also genug seyn, nur den Fundamentalsatz des ganzen Verfahrens, welches im Grunde der binomische Lehrsatz ist, zu der gegenwärtigen Absicht auf die bequemste Gestalt zurückzubringen.

Man soll in einer Reihe, die nach Potenzen einer gewissen Hauptgröße fortgeht, statt dieser Hauptgröße, eine andre, zweytheilige substituiren, und das Resultat, nach den Potenzen des zweyten Theils in der letzteren angeordnet, darstellen; in der Reihe: $y = Az^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta}$, statt z die Größe $Bx^{a} + u$. Es ist in diesem Falle am bequemsten, wenn man für den Anfang den ersten Theil des zweytheiligen Werths, welcher statt der Hauptgröße gesetzt werden soll, durch das Zeichen dieser Größe selbst andeutet, mithin, statt für z zu setzen $Ax^{a} + u$, anfangs dafür $z + u$ substituirt. Es versteht sich, daß alsdann nachher an die Stelle des Zeichens z sein eigentlicher Werth, Ax^{a}, gesetzt werden muß.

Man nehme also die gegebene Form: $y = Az^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A} z^{\alpha + r\delta} \ldots$ und setze in ihr an den Platz von z, die Größe $z + u$. Jedes ihrer Glieder entwickelt sich in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe, und alle diese Reihen, gleichhohe Glieder von ihnen in eine Summe zusammengezogen, stellen das Gesuchte dar. Nun aber ist es aus dem binomischen Lehrsatze bekannt, daß die successiven Glieder der entwickelten Potenz eines Binomiums, wie $(z + u)^{m}$, in einer bestimmten Beziehung stehn, so daß es leicht ist, wenn man will, jedes folgende als abgeleitet aus dem vorhergehenden zu betrachten. Das $r$te Glied jener Größe wird $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots r} z^{m-r} u^{r}$; das nächste folgende $r+1$te, $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1).(m-r)}{1 \,.\, 2 \ldots r \,.\, r+1} z^{m-(r+1)} u^{r+1}$ seyn. Sieht man die Potenzen von u als Hauptgrößen, das Uebrige als deren Coeffizienten an, so ergibt sich die Regel: man multiplicire den Coeffizienten des $r$ten Gliedes mit dem Grade der Potenz von z, welche er enthält, $(m - r)$, verringere diese Potenz selbst im Grade um eine Einheit,

$z^{m \cdot (r+1)}$, und dividire durch die Zahl des verlangten Gliedes, $r + 1$, so wird man den dieses $r + 1^{ten}$ Gliedes erhalten. Sollten mehrere Potenzen von $z + u$, als Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks vorhanden seyn, so gibt die Anwendung der eben ausgesprochenen Regel auf jede von ihnen nach der Reihe, die gleichhohen Glieder, welche, in die nemliche Potenz von u multiplicirt, in der That in eine Summe zusammengezogen werden müssen. Man setze also die gegebene Reihe selbst, in welcher, statt z, substituirt werden soll, $z + u$; sie ist das Anfangslied des Resultats; man leite aus ihr eine neue Form ab, jedes Glied mit seinem Exponenten multiplicirend, und dann diesen, sofern er Exponent bleibt, um eine Einheit verringernd; man verfahre mit dieser Form wieder eben so, um aus ihr eine folgende zu erzeugen, und bilde überhaupt solcher, durch den nemlichen Mechanismus successiv aus einander abgeleiteter Formen soviele, als man Glieder für das Resultat der Substitution verlangt. Man füge ihnen nach der Ordnung die successiven Potenzen von u, durch ihre eignen Permutationszahlen dividirt, als Factoren bey, und man erhält das Resultat der Substitution in entwickelter Gestalt. So erhält nun in Zeichen, die Rechnung folgendes Schema:

$$\underline{A z^{\alpha} + \overset{1}{A} z^{\alpha+\delta} + \overset{2}{A} z^{\alpha+2\delta} \,..\, + \overset{r}{A} z^{\alpha+r\delta}} \,..$$

$$\underline{+ [\alpha A z^{\alpha-1} + (\alpha+\delta) \overset{1}{A} z^{\alpha+\delta-1} \,..\, + (\alpha + r\delta) \overset{r}{A} z^{\alpha+r\delta-1}] u}$$

$$+ [\alpha(\alpha-1) A z^{\alpha-2} \,..\, + (\alpha+r\delta) . (\alpha+r\delta-1) \overset{r}{A} z^{\alpha+r\delta-2}] \frac{u^2}{1 . 2}$$

u. s. w. Wir wollen dieses Verfahren durch eine eigenthümliche Bezeichnung festhalten. Eine Form, die nach Potenzen von z fortschreitet, mag durch $F(z)$ angedeutet werden. Die aus ihr abgeleitete, welche dadurch entsteht, daß man jedes Glied in ihr mit seinem Exponenten multiplicirt, und den Grad der Potenz um eine Einheit verringert, durch

$F^1(z)$; die daraus auf die nemliche Weise abgeleitete durch $F^2(z)$ u. s. w. Alsdann wird sich die eben ausgesprochene Regel folgendermaßen in Zeichen ausdrücken lassen:

$$F(z+u) = F(z) + F^1(z).u + \frac{F^2(z).u^2}{1.2} + \frac{F^3(z)u^3}{1.2.3} + ..$$

Eigentlich gehört diese Untersuchung in einen besondern Theil der Analysis, welcher die Benennung der Differenzenrechnung führt, und wo sie, unter veränderten Benennungen und Bezeichnungen, in ihrem ganzen Umfange ausgeführt wird. Sofern die Form, in welche für die Hauptgröße eine neue Form, bestehe diese auch nur in einer zweytheiligen Größe, substituirt wird, selbst schon entwickelt ist, hat freylich die Betrachtung keinen großen Umfang, sondern kommt im Wesentlichen auf den vorhin dargestellten Satz zurück. Aber wenn man verlangt, daß in einem Ausdrucke, der noch unentwickelt ist, für die Hauptgröße eine andre zweytheilige gesetzt, und nun das Resultat in eine Reihe, die nach Potenzen des zweyten Theils jener substituirten zweyten Größe fortgeht, entwickelt dargestellt werden soll, so bietet sich ein großes Feld neuer Betrachtungen dar. Denn nun entsteht die Frage, ob nicht der anfänglich gegebene Ausdruck selbst unentwickelt bleiben kann, so daß demungeachtet die Substitution in ihm vollzogen werde, und die gesuchte, nach Potenzen der durch die Substitution herbeygeführten neuen Hauptgröße fortschreitende Reihe hervorgehe, sey es auch, daß die Coeffizienten derselben als unentwickelte Ausdrücke erscheinen. Es ist hier nicht unsre Absicht, diese Untersuchungen, welche einem folgenden Abschnitte der Analysis vorbehalten bleiben, ferner auszuführen. Indessen mag, theils als einzelnes Beyspiel, theils als ein Satz, welcher zur Abkürzung einer gleich nachher zu führenden Untersuchung behülflich seyn kann, nur ein Theorem aus jener Lehre, und zwar das fundamentale, hier noch eine Stelle finden.

Es sey eine Form, die zu einer vorgeschriebenen Potenz erst erhoben werden soll, gegeben:

$$F(z) = Zz^{\alpha} + \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta} \ldots$$

mithin das zu Berechnende, angedeutet:

$$[F(z)]^{n} = {}^{n}Zz^{n\alpha} + {}^{n}\overset{1}{Z}z^{n\alpha+\delta} \ldots + {}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta} \ldots$$

Es wird verlangt, die Entwicklung der Substitution von $z + u$ für z in der Größe $[F(z)]^{n}$ zu machen, ohne sie selbst in entwickelter Gestalt vorher schon berechnet zu haben.

Man kann offenbar schon in der gegebenen Form selbst, $F(z)$ die Substitution vollbringen. Dadurch wird aus ihr, vermöge des vorhin dargestellten Mechanismus, eine Reihe, welche nach Potenzen von u fortschreitet:

$$F(z) + F^{1}(z).u + \frac{F^{2}(z).u^{2}}{1.2} + \ldots \frac{F^{r}(z)\,u^{r}}{1.2.r} \ldots$$

Man hat also nur noch diese Reihe zu der verlangten nten Potenz zu erheben, welches vermöge des bekannten polynomischen Lehrsatzes geschehn kann, und das Resultat der Entwicklung wird in gesetzmäßiger Gestalt vorhanden seyn.

Man hätte aber auch die geforderte Potenz von $F(z)$ erst berechnen, und dann, in jedem Gliede der dadurch entstandenen Reihe, für z den Werth $z + u$ setzen können. Beyde Resultate müssen nothwendig identisch seyn, gleichhohe Glieder in beyden also die nemlichen Resultate gewähren. So wird z. E., was zu unsern nächsten Absichten hinreicht, das erste Glied der resultirenden Form, auf dem ersten Wege gesucht, wo also von $\left[F(z) + F^{1}(z).u + \frac{F^{2}(z).u^{2}}{1.2} \ldots\right]^{n}$ das erste Glied nach dem anfänglichen genommen werden muß, $n.[F(z)]^{n-1}.F^{1}(z).u$. Hingegen eben dieses Glied, auf dem zweyten Wege gefunden, wird $F^{1}[F(z)]^{n}.u$. Es folgt also daraus, daß $n[F(z)]^{n-1}.F^{1}(z) = \overset{1}{F}[F(z)]^{n}$. Ein Lehrsatz, der folgendermaßen ausgedrückt werden kann.

Es sey eine beliebige Reihe:

$$F(z) = Zz^{\alpha} + \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta} + \overset{2}{Z}z^{\alpha+2\delta} \ldots + \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta} \ldots$$

vorhanden. Es sey ihre nte Potenz:

$$[F(z)]^{n} = {}^{n}Zz^{n\alpha} + {}^{n}\overset{1}{Z}z^{n\alpha+\delta} + \ldots + {}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta} \ldots$$

und ebenso ihre (n-1)te:

$$[F(z)]^{n-1} = {}^{n-1}Zz^{(n-1)\alpha} + {}^{n-1}\overset{1}{Z}z^{(n-1)\alpha+\delta} + {}^{n-1}\overset{2}{Z}z^{(n-1)\alpha+2\delta} \ldots + {}^{n-1}\overset{r}{Z}z^{(n-1)\alpha+r\delta} \ldots$$

Man nehme von der Reihe selbst, die abgeleitete Form, nmal:

$$nF^{1}(z) = n\alpha Zz^{\alpha-1} + n(\alpha+\delta). \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta-1} \ldots + n(\alpha+r\delta). \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta-1}.$$

Ihr Product, mit der (n-1)ten Potenz der Reihe selbst multiplicirt, muß genau die abgeleitete Form hervorbringen, welche aus der entwickelten nten Potenz der Reihe selbst gezogen werden kann, d. h. $n\alpha . {}^{n}Zz^{n\alpha-1}$

$$+ (n\alpha+\delta)\, {}^{n}\overset{1}{Z}z^{n\alpha+\delta-1} \ldots + (n\alpha+r\delta)\, {}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta-1}.$$

Es wird also aus den beyden Factoren:

$$[F(z)]^{n-1} = {}^{n-1}Zz^{(n-1)\alpha} + \ldots {}^{n-1}\overset{r}{Z}z^{(n-1)\alpha+r\delta}$$

$$n.F^{1}(z) = n.\alpha Zz^{\alpha-1} + \ldots n(\alpha+r\delta)\, \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta-1}$$

$$\text{das Product} = n\alpha.{}^{n}Zz^{n\alpha-1} + \ldots (n\alpha+r\delta).{}^{n}\overset{r}{Z}z^{n\alpha+r\delta-1}$$

Mithin, wenn wir unbestimmt den rten Coeffizienten des Products aus den Factoren würklich berechnen, und dem gleichhohen seines schon bekannten Werthes gleichsetzen,

$$n[(\alpha+r\delta)].\overset{r}{Z}.{}^{n-1}Z + [\alpha+(r-1)\delta].\overset{r-1}{Z}.{}^{n-1}\overset{1}{Z} + \ldots$$

$$[\alpha+(r-k)\delta]\overset{r-k}{Z}.{}^{n-1}\overset{k}{Z} \ldots + \alpha Z.{}^{n-1}\overset{r}{Z}] = (n\alpha+r\delta)\, {}^{n}\overset{r}{Z}$$

Eine recurrirende Beziehung zwischen den r ersten Coeffizienten von der ersten und (n-1)ten Potenz einer beliebig angenommenen Reihe und dem rten Coeffizienten ihrer nächst-

höheren nten Potenz, die sehr leicht folgendermaßen in Worten ausgesprochen werden könnte. Man multiplicire eine beliebige Potenz einer willkührlich genommenen Reihe mit der Reihe selbst, nachdem in dieser die Coeffizienten mit den Exponenten der in den zugehörigen Gliedern vorkommenden Potenzen vervielfacht worden sind; das Product gibt eine Reihe, welche die nächsthöhere Potenz der angenommenen darstellen wird, nur daß jedes Glied dieser Potenz mit seinem eignen Exponenten multiplicirt, und durch den Grad der Potenz selbst dividirt, und insofern verändert, vermöge jenes Products zum Vorschein kommt.

Man kann eben diesen Satz noch etwas allgemeiner ausdrücken. Es sey die anfangs angenommene Form, die wir vorhin durch $Zz^{\alpha} + \overset{1}{Z}z^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{Z}z^{\alpha+r\delta} ..$ bezeichneten, selbst schon von irgend einer andern, die wir hier nicht näher zu bezeichnen brauchen, deren Coeffizienten aber $\mathfrak{Z}, \overset{1}{\mathfrak{Z}}, \overset{2}{\mathfrak{Z}}$ u. s. w. seyn mögen, eine Potenz des Grades f. Alsdann wird man sie und ihre Coeffizienten durch $^{f}\mathfrak{Z}z^{\alpha} + {}^{f}\overset{1}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+\delta} .. + {}^{f}\overset{r}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+r\delta} ..$ andeuten können. Die Reihe aber, welche von ihr die $n-1$te Potenz ist, wird von jener ersten die $(n-1)f$te Potenz seyn. Brauchen wir für $(n-1)f$ das Zeichen g, woraus sogleich $nf = f + g$ folgt, so wird die nte Potenz derselben Reihe nun die $(f+g)$te der neu angenommenen. Und nun kann unser voriger Satz so ausgedrückt werden.

Es sey eine Reihe vorhanden, welche als beliebige, schon berechnete Potenz einer andern gegeben werde:

$$^{f}\mathfrak{Z}z^{\alpha} + {}^{f}\overset{1}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+\delta} .. + {}^{f}\overset{r}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha+r\delta} ..$$

Ebenso eine zweyte, welche als eine andre, willkührliche Potenz eben der Grundform gegeben seyn mag:

$$^{g}\mathfrak{Z}z^{\alpha \cdot \frac{g}{f}} + {}^{g}\overset{1}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha \cdot \frac{g}{f}+\delta} .. + {}^{g}\overset{r}{\mathfrak{Z}}z^{\alpha \cdot \frac{g}{f}+r\delta} ..$$

Man multiplicire in der ersten von beyden Reihen jedes Glied mit dem Exponenten seiner Potenz, und bilde alsdann ein Product aus ihr in die zweyte Reihe. Was herauskommt, wird eine dritte Reihe seyn, welche mit der Potenz des Grades $f+g$, von der nemlichen Grundform, nur daß jedes Glied derselben mit seinem eignen Exponenten multiplicirt, und durch $f+g$ dividirt werde, völlig zusammenfällt. In Zeichen:

$$(\alpha+r\delta).\,{}^{f}\overset{r}{\mathfrak{Z}}.\,{}^{g}\mathfrak{Z}+[\alpha+(r-1)\delta]\,{}^{f}\overset{r-1}{\mathfrak{Z}}\,{}^{g}\overset{1}{\mathfrak{Z}}\,..+[\alpha+(r-k)\delta]\,{}^{f}\overset{r-k}{\mathfrak{Z}}.\,{}^{g}\overset{k}{\mathfrak{Z}}\,..+\alpha\,{}^{f}\mathfrak{Z}\,{}^{g}\overset{r}{\mathfrak{Z}}=\frac{[\alpha(f+g)+f r d]}{f+g}.\,{}^{f+g}\overset{r}{\mathfrak{Z}}.$$

Der Gebrauch dieser Formel wird sich im nächsten Kapitel zeigen.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Umkehrung der Reihen.

Wenn eine Größe, y, durch irgend einen arithmetischen Ausdruck aus einer andern, x, zusammengesetzt gegeben ist, so läßt sich der Werth von ihr in den mehrsten Fällen durch eine Reihe von der bekannten Gestalt, $y=Ax^{a}+\overset{1}{A}x^{a+d}+\overset{2}{A}x^{a+2d}..+\overset{r}{A}x^{a+rd}$ darstellen. Aber jede gegebene Beziehung zwischen zwey Größen muß es überhaupt möglich machen, die eine von ihnen durch die andre auszudrücken. Es muß also auch die Forderung befriedigt werden können: die Gestalt der anfänglich gegebenen Gleichung so umzuändern, daß die Größe, welche vorher diente, die andre auszudrücken, nun selbst diejenige wird, deren Werth aus jener anderen abgeleitet werden kann, daß also, in Zeichen, x vermöge eines bestimmten arithmetischen Ausdrucks durch y gegeben erscheint.

Man nennt den Inbegriff der Operationen, welche mit der zuerst angenommenen Gleichung vollzogen werden müssen, um ihr jene zuletzt genannte Gestalt zu ertheilen, Umkehrung der Gleichung. Diese Operation ist von der höchsten Wichtigkeit, da unsre Kenntniß von dem Zusammenhange zweyer Größen nur dann vollständig ist, wenn wir jede von ihnen aus der andern abzuleiten vermögen. Aber sie läßt sich auf eine directe Weise, an geschlossenen arithmetischen Ausdrücken, in sehr wenigen Fällen vollziehen. Es wird also schon sehr viel gewonnen seyn, wenn sie auch nur bey Entwicklungen in Reihen unbedingt vollführt werden kann. Wir wollen mithin die folgende Aufgabe zur Betrachtung ziehn: der Werth einer von zwey zusammengehörigen Hauptgrößen ist durch eine entwickelte Form, die nach Potenzen der andern fortgeht, gegeben, $y = A x^{a} + \overset{1}{A} x^{a+d} .. + \overset{r}{A} x^{a+rd} + ..$ Man frägt, ob es nicht möglich ist, aus dieser Reihe eine andre, von ähnlicher Gestalt, abzuleiten, welche den Werth der zweyten Hauptgröße, in einer nach Potenzen der ersten fortgehendeh Form, $x = B y^{\alpha} + \overset{1}{B} y^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{B} y^{\alpha+r\delta} ..$ darstellt, und nach welchem Gesetze Exponenten und Coeffizienten dieser neuen Reihe, welche die umgekehrte der vorigen heißen soll, gebildet werden müssen.

Wenn es in der That einen solchen Ausdruck für x gibt, so ist die Bedingung, welche er erfüllen muß, leicht anzugeben. Man substituire in der ersten würklich gegebenen Reihe, $y = A x^{a} + A x^{a+d} .. + \overset{r}{A} x^{a+rd} ..$, für x jene Form, welche den Werth dieser Größe darstellen soll. Das Resultat der ganzen Substitution wird ein Inbegriff mehrerer Reihen werden, von denen jede nach Potenzen von y fortschreitet. Nun aber ist angenommen worden, daß die Summe aller der Glieder, aus denen die Form besteht, in welche man substituirt, y selbst seyn soll. Es muß also jener

Inbegriff von Reihen, von denen jede einzelne nach Potenzen von y fortschreitet, mit y selbst identisch werden. Dies ist nicht anders möglich, als so, daß wenn man jene Reihen in eine Summe würklich zusammenzieht, in dieser Summe ein Glied vorkommt, welches y ist, während jedes der andern Glieder, welche Potenz von y es auch enthalten mag, zu seinem Coeffizienten o bekommt. Nur alsdann, wenn die zweyte, für x angenommene Reihe dieser Forderung Genüge leistet, darf sie als bestehend neben der ersten, für y bestimmt gegebenen, und folglich als die umgekehrte von dieser angesehen werden. Aus eben dieser Bedingung läßt sich ableiten, wie eine Reihe, welche von einer andern die umgekehrte ist, von dieser abhängt, und aus ihr abgeleitet werden kann. Bey einer völlig unbekannten Reihe sind zwey Momente in Rücksicht zu nehmen. Zuerst ihre Form, welche durch die Progression, worin sich die Exponenten der Potenzen in ihren successiven Gliedern befinden, bestimmt wird. Zweytens ihre Coefficienten, und das Gesetz, nach welchem sie sich erzeugen. Wir wollen also, um die Untersuchung auszuführen, zuerst nur fragen, ob sich für die umgekehrte Reihe, wenn man sie vorläufig als gefunden fingiren wollte, doch wenigstens immer eine bestimmte Form, oder vielleicht mehr als eine Form festsetzen läßt, so daß würklich, wenn man nur nachher die Coeffizienten gehörig einrichtet, jene Bedingung, welcher die umgekehrte Reihe durchaus Genüge leisten soll, unfehlbar befriedigt werden kann.

Es ist aber aus dem vorigen Kapitel bekannt, daß nur dann die Reihen, welche aus einer Form wie die gegebene:

$$y = Ax^{\alpha} + \overset{1}{A}x^{\alpha + \delta} .. + \overset{r}{A}x^{\alpha + r\delta}$$

entspringen, wenn man in ihr für x die neue:

$$x = By^{a} + \overset{1}{B}y^{a + d} .. + \overset{r}{B}y^{a + r\delta}$$

substituirt, sich würklich vereinigen, wenn $d = \frac{a\delta}{m}$, unter m

eine beliebige ganze Zahl verstanden, und daß in jedem andern Falle jede der genannten Reihen ihre Glieder in die Summe bringt, ohne daß zu irgend einem Gliede der einen sich ein gleichhohes der andern gesellte. Nun aber ist unsre Bedingung, daß in der Summe nur ein Glied seyn soll, welches $= y$ wird, die andern alle aber einzeln o zum Coeffizienten haben müssen. Aber wofern auch nur von irgend einer Potenz einer gewissen Reihe, wie hier die für x fingirte, jedes einzelne Glied für sich $= 0$ werden sollte, so müßte die Reihe selbst, mithin jedes einzelne Glied schon $= 0$ gewesen seyn. Aber für x eine Reihe setzen, von der jedes einzelne Glied $= 0$ wäre, hiesse eine Ungereimtheit begehn. Man darf also für die umgekehrte Reihe keine Form annehmen, wobey sich eine solche Nothwendigkeit ergeben würde, und sie kann, dem Vorhergehenden gemäß, nicht vermieden werden, wenn die Progression der Exponenten in ihr nicht so eingerichtet wird, daß die Differenz derselben $d = \frac{a\delta}{m}$ ist.

Es bleibt aber selbst alsdann, wenn man für die fingirte umgekehrte Reihe Exponenten annimt, die allmälig um $\frac{a\delta}{m}$ größer werden, in welchem Falle allerdings die Glieder der verschiedenen Reihen, welche bey der Substitution entstehn, in einander würklich bey Vereinigung eingreifen, die Frage zurück: ob nun das Resultat der ganzen Substitution würklich $= 0$ gesetzt, und eben daraus alles, was in der fingirten Reihe vorläufig angenommen ist, völlig bestimmt werden kann.

Die Annahme, daß $d = \frac{a\delta}{m}$ seyn soll, läßt, da m jede willkührliche Zahl seyn darf, für die Form der fingirten umgekehrten Reihe, wie es scheint, unzählig viele bestimmte Gestalten zu. Wir wollen uns zuerst nur auf die einfachste, wo $m = 1$ ist, beschränken; es wird sich nachher zeigen, daß sie

die einzige, welche gestattet werden kann, darstellt. Wir wollen also für x die Reihe $x = By^a + \overset{1}{B}y^{a+a\delta} .. + \overset{r}{B}y^{a+ra\delta} ..,$ welche inskünftige die Grundreihe genannt werden soll, fingiren. Dieser Werth von x soll in der gegebenen Reihe $y = Ax^\alpha + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta} ..$ substituirt, und die aus jedem ihrer Glieder dadurch entstandene neue Reihe eine Partialreihe genannt werden. Es soll endlich die Summe aller der so entstandenen Reihen, welche eine neue ähnlich gebildete, die Totalreihe genannt, hervorbringen muß, berechnet, und von ihr untersucht werden, ob und in wiefern sie würklich $= y$ gesetzt werden kann.

Es ist aus den Untersuchungen über die Substitution bekannt, daß, bey der angenommenen Gestalt der Grundreihe, die aus den einzelnen Gliedern der gegebenen entspringenden Partialreihen sich so vereinigen, daß jede folgende mit ihrem Anfangsgliede in ein Glied der ersten Partialreihe eingreift, dessen Zahl mit der der Partialreihe selbst identisch ist. Aus dem allgemeinen Ausdrucke für jedes Glied der Totalreihe ergab sich, daß jeder Coeffizient von ihr aus eben so vielen der fingirten Grundreihe gebildet wird, als seine eigne Zahl Einheiten enthält. Soll also die Totalreihe $= y$ gesetzt werden, so muß es unbedingt möglich seyn, ihr Anfangsglied $= y$, und jedes der folgenden für sich $= 0$ zu setzen. Denn offenbar kann, da die ganze Totalreihe mit y identisch seyn soll, nur eins ihrer Glieder $= y$, und es muß alsdann jedes der andern $= 0$ seyn. Das Anfangsglied der Totalreihe kann aber nicht $= 0$ seyn. Denn es enthält nichts als eine Potenz vom ersten Gliede der Grundreihe, mit einem bestimmten Factor multiplicirt. Soll es also $= 0$ werden, so muß die Größe, wovon es eine Potenz ist, es muß also das Anfangsglied der Grundreihe $= 0$ seyn. Eine Reihe aber, die kein Anfangsglied hat, ist eine Ungereimtheit. Setzen wir also, weil wir müssen, das Anfangsglied der Totalreihe,

$AB^{\alpha}y^{a\alpha} = y$, so folgt daraus in Absicht auf die Exponenten, daß $a\alpha = 1$, mithin $a = \frac{1}{\alpha}$; in Absicht auf die Coeffizienten, daß $A . B^{\alpha} = 1$, folglich $B = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Es bestimmt sich also dadurch das Anfangsglied der Grundreihe vollkommen. Was aber alle übrigen Glieder der Totalreihe betrifft, so muß nun bewiesen werden, daß es möglich ist, jedes von ihnen $= 0$ zu setzen. Nun enthält der erste Coeffizient der Totalreihe nur den ersten und anfänglichen der Grundreihe; der zweyte nur den zweyten und die vorhergehenden der Grundreihe; allgemein der rte Coeffizient der Totalreihe nur den rten der Grundreihe und die vorhergehenden. Alle Coeffizienten der Grundreihe sind noch unbestimmt; man verlangt aber zu wissen, ob nicht für sie Werthe angegeben werden können, welche die gegenwärtige Forderung erfüllen. Setzt man also jeden von den successiven Coeffizienten der Totalreihe nach dem anfänglichen $= 0$, so bekommt man Gleichungen, in denen eben so viele unbekannte Größen vorhanden sind. Es ist aber bekannt, daß in diesem Falle jede der unbekannten Größen aus jenen Gleichungen gefunden werden kann. Wir wissen ferner aus dem Vorhergehenden, daß jeder Coeffizient der Grundreihe da, wo er zum ersten Male zur Bildung eines Coeffizienten der Totalreihe gebraucht wird, nur zur ersten Potenz erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt, erscheint, während alle die übrigen Producte, welche neben diesem als zusammengehörige Theile den ganzen Coeffizienten der Totalreihe bilden, aus niedrigeren Coeffizienten der Grundreihe zusammengesetzt sind. So gibt also das successive $= 0$ Setzen von den Coeffizienten der Totalreihe Gleichungen, von denen jede folgende eine unbekannte Größe mehr als die vorhergehende enthält, und worin diese unbekannte Größe nur auf die erste Potenz

erhoben, und mit einem bestimmten Factor multiplicirt enthalten ist. Es wird sich also aus jeder neuen Gleichung eine neue unbekannte Größe, und zwar, weil die Gleichung in Beziehung auf sie nur vom ersten Grade ist, vermöge eines einzigen, möglichen und unzweydeutigen Werthes bestimmen lassen. So gibt der erste Coeffizient der Totalreihe, weil er nichts Unbestimmtes als den ersten der fingirten Grundreihe enthält, indem man ihn $= 0$ setzt, den Werth dieses ersten Coeffizienten der Grundreihe; der zweyte der Totalreihe, weil in ihm nur noch der zweyte der Grundreihe als unbekannt vorkommt, für diesen den Werth, welchen er haben muß. Es ist also unbedingt möglich, jeden folgenden Coeffizienten der Totalreihe $= o$ zu setzen, und es ergeben sich gerade dadurch für alle fingirten Coeffizienten der Grundreihe, bestimmte, mögliche und unzweydeutige Werthe, die ihnen nothwendig beygelegt werden müssen, wenn die Grundreihe ihre Bestimmung, die umgekehrte einer andern, gegebenen, zu seyn, erfüllen soll.

Das Resultat unsrer bisherigen Untersuchung ist folgendes. Wenn für die Reihe:

$$y = Ax^{\alpha} + \overset{1}{A}x^{\alpha + \delta} \ldots + \overset{r}{A}x^{\alpha + r\delta}$$

eine umgekehrte, welche den Werth von x durch y ausdrückt, gefunden werden soll, so ist es gestattet anzunehmen, daß diese neue Reihe, deren Coeffizienten übrigens für den Anfang fingirt werden mögen, die Gestalt:

$$x = B\,y^{\frac{1}{\alpha}} + \overset{1}{B}y^{\frac{1+\delta}{\alpha}} + \ldots \overset{r}{B}y^{\frac{1+r\delta}{\alpha}} \ldots$$

besitze (mithin die nemliche Differenz der Exponenten, wie die gegebene, nur durch deren Anfangsglied selbst dividirt). Und es wird allemal möglich seyn, die Coeffizienten der umgekehrten Reihe aus denen der gegebenen durch mögliche unzweydeutige Ausdrücke zu berechnen. Der Mechanismus und

das Gesetz dieser Berechnung macht den zweyten Theil der Untersuchung aus.

Eben dieses Resultat kann, aus den nemlicheu Gründen, noch auf einem andern Wege erhalten werden. Nachdem die umgekehrte Reihe: $x = By^{a} + \overset{1}{B}y^{a+d} .. + \overset{r}{B}y^{a+rd} ..$, wie vorhin fingirt worden ist, substituire man in jedem ihrer Glieder statt y den Werth, welchen die gegebene Reihe: $y = Ax^{\alpha} + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} .. + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta} ..$ dafür darbietet. Das Resultat aller dieser Substitutionen wird eine, nach Potenzen von x fortschreitende, Totalreihe seyn, welche $= x$ gesetzt werden muß. Alle übrigen Schlüsse bleiben wie vorher, und man erhält auf diesem Wege die nemliche Form der fingirten umgekehrten Reihe, und die mit derselben verbundene Möglichkeit einer unfehlbaren unzweydeutigen Bestimmung der Coeffizienten. Es würde Wiederholung des Vorhergehenden seyn, wenn diese Untersuchung von Neuem wieder angestellt werden sollte: indessen ist es doch nicht überflüssig, ihren Anfang in genaue Betrachtuug zu ziehn. Hier ist die Grundreihe keine fingirte, sondern eine gegebene. Die Nothwendigkeit, daß alle Partialreihen in einander eingreifen, erhellet also noch unmittelbarer. Denn, wenn irgend eine von ihnen für sich $= o$ gesetzt werden müßte, so ergäbe sich daraus der Widerspruch, daß eine Potenz von einer bestimmten Reihe $= o$ seyn sollte. Dieses Eingreifen der durch die Substitution entstandenen Partialreihen hat aber die Bedingung, daß die Differenz der Exponenten in der Reihe welche man substituirt, hier also δ, ein Product aus dem Anfangs-Exponenten der nemlichen Reihe, in die Differenz der Exponenten von der Reihe, in welche substituirt wird, durch irgend eine beliebige ganze Zahl dividirt, folglich $\delta = \frac{\alpha d}{m}$ seyn muß. Daraus folgt also rückwärts, daß

$d = \frac{m . \delta .}{\alpha}$, oder da $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $d = m a \delta$ seyn müßte, wo unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden werden kann. Insofern also, als die Reihe für y, welche wir suchen, wenn sie selbst umgekehrt würde, die gegebene für x hervorbringen müßte, ist es gestattet, der Progression ihrer Exponenten, eine unter dem unbestimmten Ausdrucke $m a \delta$ enthaltene Differenz beyzulegen. Insofern aber, als sie selbst eigentlich das Umgekehrte der gegebenen Reihe für x ist, fällt die Differenz ihrer Exponenten, unter den unbestimmten Ausdruck $\frac{a\delta}{m}$. Nun aber gilt ebenso gut das Erste, als das Zweyte von ihr. Es muß also die Differenz ihrer Exponenten sowohl unter dem Ausdrucke $m a \delta$, als unter dem $\frac{1}{m} a \delta$ enthalten seyn. Es gibt aber nur eine Ausnahme, bey welcher beydes zugleich statt finden kann, wenn nemlich $m = 1$ gesetzt wird. Mithin ist $a \delta$ die einzige Differenz, welche für die Progression der Exponenten in der fingirten Reihe genommen werden darf, und die Gestalt der umgekehrten Reihe, welche wir vorher nur als die einfachste aufgestellt, und dem Zwecke der Umkehrung völlig entsprechend gerechtfertigt haben, die einzig mögliche. Gestattet wird es freylich immer bleiben, wenn man die Umkehrung nur auf eine Weise, z. E. die erste vornehmen will, statt der eigentlichen fingirten Reihe $x = B y^{\frac{1}{\alpha}} + \overset{1}{B} y^{\frac{1+\delta}{\alpha}}$ .. eine andre zu setzen, in welcher die Progression der Exponenten durch noch kleinere Unterschiede fortläuft. Es wird sich aber bey würklicher Berechnung finden, daß die Coeffizienten von allen den Gliedern, die in der neu fingirten Reihe zwischen die der ersten gesetzt sind, $= 0$ werden; die Rechnung selbst wird auf diese zurückführen, indem sie das Ueberflüssige der Voraussetzung vernichtet. Auch davon ließe sich, wenn es nicht für unsre Absicht völlig

überflüssig wäre, aus dem Gange der Substitution und der Form ihres Resultats eine Bestätigung geben.

Es kommt in höheren arithmetischen Untersuchungen sehr oft vor, daß gegebene Reihen umgekehrt werden müssen. Der Satz also: man dividire die Differenz der Exponenten der gegebenen Reihe durch den anfänglichen unter ihnen, so erhält man die der Exponenten der umgekehrten Reihe, ist von großer Wichtigkeit. Der particularste, am häufigsten vorkommende Fall ist derjenige, wo die gegebene Reihe die successiven ganzen Zahlen, von 1 an, zu ihren Exponenten erhalten hat. Alsdann wird die umgekehrte von ihr gerade die nemliche Form besitzen. In Zeichen: wenn

$$y = Ax + \overset{1}{A}x^2 + \overset{2}{A}x^3 \,.\,. + \overset{r}{A}x^{r+1} \,.\,.$$ so wird

$$x = By + \overset{1}{B}y^2 + \overset{2}{B}y^3 \,.\,. + \overset{r}{B}x^{r+1}$$

gesetzt werden müssen. Eine Reihe aber, die mit einem Gliede anhebt, worin von der Hauptgröße, welche sie regiert, gar keine Potenz vorkommt, läßt sich geradezu nicht umkehren.

Der zweyte Haupttheil von den Untersuchungen über die Reversion der Reihen betrifft die Coeffizienten der umgekehrten Reihe, und die Art, wie ihre Werthe aus denen der gegebenen abgeleitet werden können. Sie ist verwickelt, führt aber zuletzt auf ein sehr einfaches Gesetz zurück.

Um diese Untersuchung so allgemein als möglich zu machen, wollen wir ihren Umfang noch mehr erweitern. Es mag also nicht die eine Hauptgröße selbst, sondern irgend eine Potenz von ihr, durch eine nach Potenzen der andern fortschreitende Reihe gegeben seyn, und umgekehrt für eine beliebige Potenz der zweyten Hauptgröße eine Reihe gesucht werden, welche nach Potenzen der ersten fortgeht. In Zeichen: es soll die Reihe $y^m = Xx^{\beta} + \overset{1}{X}x^{\beta+\delta} \,.\,. + \overset{r}{X}x^{\beta+r\delta} \,.\,.$ gegeben, und daraus rückwärts die Reihe

$$x^n = Y y^b + \overset{1}{Y} y^{b+d} \ldots + \overset{r}{Y} y^{b+rd}$$

gefunden werden.

Die Form, welche die gesuchte Reihe erhalten muß, leitet sich unmittelbar aus der vorigen Betrachtung ab. Wenn in der gegebenen Reihe für y^m die Progression der Exponenten β, $\beta + \delta$, u. s. w. ist, so wird sie in einer durch den polynomischen Lehrsatz sogleich für y zu erhaltenden Reihe, $\frac{\beta}{m}$; $\frac{\beta}{m} + \delta$, u. s. w. seyn. Wenn diese Reihe für y umgekehrt wird, so bekommt die, Anfangs zu fingirende, x ausdrückende Reihe, die Progression der Exponenten $\frac{m}{\beta}$; $\frac{m}{\beta} + \frac{m}{\beta}\delta$, u. s. w. Soll endlich diese Reihe, nachdem sie gefunden ist, zur nten Potenz gehoben werden, so muß die neue daraus hervorgehende mit ihren Exponenten die Progression $\frac{nm}{\beta}$; $\frac{nm}{\beta} + \frac{m}{\beta}\delta$, u. s. w. befolgen. Es wird also die zweyte, fingirte Reihe folgende Form besitzen

$$x^n = Y y^{\frac{nm}{\beta}} + \overset{1}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{m\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{rm\delta}{\beta}} \ldots$$

Das Gesetz, welchem die Coeffizienten einer Reihe unterworfen sind, kann entweder recurrirend, oder independent gegeben werden. Hier gelangt man, der Natur der Sache gemäß, zuerst zu einer recurrirenden Bestimmung, und erst durch Hülfe dieser wird es möglich, auch einen independenten Ausdruck zu erhalten.

I. Die Recursionsformel für die Coeffizienten der umgekehrten Reihe ergibt sich aus den bekannten Formeln für die Substitution unmittelbar, wenn man die gegebene Reihe in jedem Gliede der fingirten umgekehrten substituirt, und die daraus entstandene Totalreihe dem Werthe, welchen sie besitzen soll, identificirt. Man könnte zwar auch dadurch, daß

man die Substitution in umgekehrter Ordnung vollzöge, zu dem nemlichen Zwecke gelangen, aber die Resultate würden sich nicht in einfacher Gestalt darbieten.

Wenn man in der fingirten Reihe

$$x^n = Y y^{\frac{nm}{\beta}} + \overset{1}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{m\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{rm\delta}{\beta}} \ldots$$

wo man auch zur augenblicklichen Abkürzung für y^m das Zeichen u gebrauchen, mithin diese Reihe durch

$$x^n = Y u^{\frac{n}{\beta}} + \overset{1}{Y} u^{\frac{n+\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y} u^{\frac{n+r\delta}{\beta}} \ldots$$

ausdrücken könnte, für die Größe $y^m = u$ ihren gegebenen Werth

$$u = y^m = X x^{\beta} + \overset{1}{X} x^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{X} x^{\beta + r\delta}$$

substituirt, so ist das Anfangsglied der dadurch entstehenden Totalreihe $Y \,.\, X^{\frac{n}{\beta}} x^n \ldots$ Die ganze Totalreihe soll $= x^n$ seyn, es muß also der Coeffizient ihres Anfangsgliedes, $Y X^{\frac{n}{\beta}} = 1$, der Coeffizient jedes folgenden $= 0$ seyn. Daraus also folgt zuerst, daß $Y = 1 : X^{\frac{n}{\beta}} = X^{\frac{-n}{\beta}}$ seyn muß. Was alle folgenden Coeffizienten betrifft, so werden wir nur den allgemeinen Ausdruck für die der Totalreihe zu suchen, und $= 0$ zu setzen haben, um die Recursionsformel für sie zu bekommen. Nun aber ist, der Lehre von der Substitution gemäß, der $r$te Coeffizient der Totalreihe ${}_{0\ldots r}\overset{k}{\Sigma}\left(\overset{k}{Y} \cdot \overset{r-k}{X}{}^{\frac{(n+k\delta)}{\beta}}\right)$. Dieser Ausdruck also, $= 0$ gesetzt, gibt unmittelbar die gesuchte Recursionsformel.

Schreiben wir ihn ohne das abkürzende Summationszeichen auf die nemliche Art, wie wir früher Recursionsformeln darzustellen pflegten, so erhält er folgende Gestalt:

$$Y.\frac{n}{\beta}X+\overset{1}{Y}.\frac{(n+\delta)}{\beta}\overset{r-1}{X}..+\overset{k}{Y}.\frac{(n+k\delta)}{\beta}\overset{r-k}{X}..+\overset{r}{Y}.\frac{(n+r\delta)}{\beta}X=0$$

Man braucht offenbar nur das Anfangsglied dieser Form zu transponiren, und von seinem Coeffizienten zu befreyen, um eine Formel zu bekommen, vermöge deren jeder Coeffizient der gesuchten Reihe, jedes Y, aus allen vorhergehenden der nemlichen Reihe, und Größen, welche aus Coeffizienten von bestimmten Potenzen der gegebenen Reihe bestehn, und insofern als bekannt angenommen werden dürfen, berechnet werden kann. Sie ist:

$$\overset{r}{Y}=-\left|\frac{\left(\frac{n+(r-1)\delta}{\beta}\right)\overset{1}{X}.\overset{r-1}{Y}..+\left(\frac{n+(r-k)\delta}{\beta}\right)\overset{k}{X}.\overset{r-k}{Y}..+\frac{n}{\beta}\overset{r}{X}.Y}{\frac{n+r\delta}{\beta}X}\right|$$

Diese Formel ist sehr zusammengesetzt, und führt zu verwickelten Rechnungen, wenn sie zur recurrirenden Bestimmung der gesuchten Coeffizienten gebraucht werden soll. Denn die Factoren, womit die schon bekannten Coeffizienten multiplicirt werden müssen, um Producte zu erhalten, deren Summe die nächstfolgenden, gesuchten Coeffizienten der fingirten Reihe hervorbringt, sind veränderlich, und müssen bey jeder neuen Recursion von Neuem berechnet werden. Und jede dieser Berechnungen ist weitläuftig; man muß die gegebene Reihe auf eine bestimmte Potenz erheben, und aus der dadurch hervorgehenden Form einen ihrer Coeffizienten, von vorgeschriebener Zahl, herausheben, um einen einzelnen von jenen Factoren zu erhalten. Versuchen wir es, wenigstens einige der ersten Coeffizienten auf diesem Wege würklich zu bestimmen. Auf diese Weise wird sich der Uebergang zu dem independenten Gesetze, wonach sie sich aus denen der gegebenen Reihe erzeugen, machen lassen.

II. Was den Coeffizienten des Anfangsgliedes in der fingirten Reihe betrifft, so ist sein Werth schon aus dem

Vorhergehenden bekannt, und muß es seyn, weil keine Recursion ihn geben kann.

$$Y = 1 : X^{\frac{n}{\beta}} = X^{\frac{-n}{\beta}} = {}^{\frac{-n}{\beta}}X$$

Um also $\overset{1}{Y}$ zu erhalten, setzen wir $r = 1$, und die Formel gibt:

$$\overset{1}{X} = -\frac{{}^{\frac{n}{\beta}}X \cdot Y}{\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)_X}$$

Dieser Werth läßt sich bequemer entwickeln. Es ist nemlich ${}^{\frac{n}{\beta}}\overset{1}{X}$, d. h. der erste Coeffizient der Potenz des Grades $\frac{n}{\beta}$ von der gegebenen Reihe $= \frac{n}{\beta} \cdot X^{\frac{n-1}{\beta}} \cdot \overset{1}{X}$. Eben so ist ${}^{\frac{n+\delta}{\beta}}X = X^{\frac{n+\delta}{\beta}}$. Mithin wird jener Bruch

$$= -\frac{\frac{n}{\beta} \cdot X^{\frac{n-1}{\beta}} \cdot X^{\frac{-n}{\beta}} \cdot \overset{1}{X}}{X^{\frac{n+\delta}{\beta}}} = -\frac{n}{\beta} X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)-1} \cdot \overset{1}{X}.$$

Man gebe dem Zahl-Coeffizienten dieses Products den Factor $\frac{\beta}{n+\delta}$, um der Größe selbst, nach Absonderung desselben, das Umgekehrte dieses Factors wieder vorsetzen zu können, schreibe sie also, ohne Aenderung ihres Werths,

$$\left(\frac{n}{n+\delta}\right)\left(-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)\right) \cdot X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)-1} \overset{1}{X}.$$ Nun aber ist der erste Coeffizient nach dem anfänglichen in einer Reihe,

welche herauskommt, wenn man die gegebene auf die Potenz des Grades $-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)$ erhebt, $= -\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right) . X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)-1} . \overset{1}{X}$.

Man erhält also für $\overset{1}{Y} = \left(\frac{n}{n+\delta}\right) . X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)} \overset{1}{X}$. Setzt man auf diesem Wege die Berechnung weiter fort, welche freylich für die folgenden Coeffizienten immer mühsamer wird, so findet sich allmählig $Y = X^{-\frac{n}{\beta}}$; $\overset{1}{Y} = \left(\frac{n}{n+\delta}\right) . X^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)} \overset{1}{X}$; $\overset{2}{Y} = \left(\frac{n}{n+2\delta}\right) . X^{\left(\frac{n+2\delta}{\beta}\right)} \overset{2}{X}$, u. s. w. Es scheint also folgendes allgemeine Gesetz in der Bildung aller Coeffizienten zu herrschen. Jeder von ihnen ist ein einziger bestimmter Coeffizient aus einer Reihe, welche entspringt, wenn man die gegebene auf die Potenz eines vorgeschriebenen Exponenten erhebt, nur daß ihm noch eine bestimmte Zahl als Factor beygegeben werden muß. Die gegebene Reihe, deren Coeffizienten durch X angedeutet werden, soll auf die Potenz des Grades $-\frac{n}{\beta}$ erhoben, und davon der Anfangs-Coeffizient genommen werden, damit man den Anfangs-Coeffizienten der umgekehrten Reihe erhalte; als Factor mag ihm, der Symmetrie der Ausdrücke wegen, noch $\frac{n}{n} = 1$ beygegeben werden. Eben diese Reihe soll auf die Potenz $-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)$ gebracht, und davon der erste Coeffizient, mit beygegebenem Factor $\left(\frac{n}{n+\delta}\right)$ genommen werden, damit man den ersten Coeffizienten der fingirten Reihe erhalte. Wäre das an den beyden ersten Coeffizienten durch wirkliche Rechnung gefundene Gesetz allgemein richtig, so würde überhaupt der rte Coeffizient der

fingirten Reihe $\overset{r}{Y} = \left(\frac{n}{n+r\delta}\right)^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)} \cdot \overset{r}{X}$ seyn. Die directe Ableitung dieses Gesetzes aus der Recursionsformel würde zu sehr verwickelten combinatorischen Betrachtungen führen; es ist in der That nicht auf diesem Wege, sondern durch Beobachtung gefunden. In so fern wird es denn auch gestattet seyn, bey dem Beweise von der Richtigkeit desselben den Weg der Induction einzuschlagen, und im Allgemeinen zu zeigen, daß es von jedem nächstfolgenden Coeffizienten der umgekehrten Reihe gültig seyn müsse, falls es für alle vorhergehenden als unbedingt stattfindend angenommen werden darf. Freylich läßt diese Beweisart, nicht in Absicht auf die Wahrheit des Satzes selbst, aber wohl in Beziehung auf die Art, wie man zur Einsicht desselben gelangt, vieles zu wünschen übrig. Sie kann nur dann eintreten, wenn man das Glück gehabt hat, durch Beobachtung Spuren eines Gesetzes zu finden, sollte also eigentlich nur da gebraucht werden, wo man auf keinem directen Wege aus der Natur des Gegenstandes Gesetze ableiten kann.

Wir nehmen also gegenwärtig an, daß für die r ersten Glieder jeder Reihe, wodurch irgend eine Potenz von x ausgedrückt werden soll, die Coeffizienten nach dem Gesetze, welches eben ausgesprochen worden ist, aus denen einer gegebenen Reihe, die eine gewisse Potenz von y, durch Glieder, in denen x die Hauptgröße ist, darstellt, berechnet werden können, um zu untersuchen, wie alsdann der Coeffizient des nächsthöheren $r+1^{ten}$ Gliedes in der gesuchten Reihe aussehn werde.

Die Methode der Untersuchung bleibt derjenigen ähnlich, welche bey der Ableitung der recurrirenden Beziehung angewendet ist. Wir nehmen die gegebene Reihe nebst der aus ihrer Umkehrung entsprungenen fingirten. Wir setzen aber

nicht, wie vorhin, in jedem Gliede der fingirten Reihe für die Hauptgröße, welche darin vorkommt, den Werth, welchen die gegebene Reihe für dieselbe darbietet, sondern umgekehrt, wie es eben so gut gestattet ist, wir nehmen die gegebene Reihe, substituiren in jedem Gliede derselben für die Hauptgröße, die es enthält, den Werth, welchen wir dafür aus der fingirten Reihe ziehn können. Auf diese Weise bildet sich eine Totalreihe, in welcher alle Coeffizienten, den des Anfangsgliedes abgerechnet, $= 0$ seyn müssen, und man erhält, indem man sie $= 0$ setzt, Gleichungen, wodurch sich die Beziehungen zwischen den Coeffizienten der fingirten Reihe ergeben. Es würde sehr unbequem seyn, wenn man dieses Verfahren, um eine Recursionsformel für diese Coeffizienten zu erhalten, wählen wollte; aber es gibt ein sehr bequemes Mittel, um den independenten Ausdruck jedes folgenden Coeffizienten zu finden, wenn man ihn für die vorhergehenden schon in seiner Gewalt hat.

Die gegebene Reihe war:

$$y^m = X x^\beta + \overset{1}{X} x^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{X} x^{\beta+r\delta} \ldots$$

Wir wollen sie, um eine bequemere Substitution zu erhalten, auf die Potenz des Grades $\frac{n}{\beta}$ erhoben annehmen, wo es aber gar nicht nöthig ist, diese Potenziirung würklich auszuführen, sondern hinreicht, sie als geschehen anzudeuten.

Es sey also gegeben:

$$y^{\frac{mn}{\beta}} = {}^{\frac{n}{\beta}}X x^n + {}^{\frac{n}{\beta}}\overset{1}{X} x^{n+\delta} \ldots + {}^{\frac{n}{\beta}}\overset{r}{X} x^{n+r\delta} \ldots$$

Die gesuchte Reihe hingegen ist:

$$x^n = Y . y^{\frac{nm}{\beta}} + \overset{1}{Y} . y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{m\delta}{\beta}} \ldots + \overset{r}{Y} . y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{rm\delta}{\beta}} \ldots$$

Es soll in der ersten von diesen beyden Reihen jedes Glied vorgenommen, und für die Potenz von x, welche es fordert,

der Werth, ausgedrückt durch eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, substituirt werden. In der daraus hervorgehenden Totalreihe muß alsdann das Anfangsglied $= y^{\frac{nm}{\beta}}$ seyn, jedes folgende aber o zu seinem Coeffizienten haben.

Aus der Lehre von der Substitution ist bekannt, wie die Partialreihen, welche aus den einzelnen Gliedern der die Substitution erleidenden Reihe entstehn, sich mit einander vereinigen. Will man allgemein das $r + 1$te Glied der Totalreihe, und dessen Coeffizienten haben, so nehme man alle Glieder der gegebenen Reihe bis zum $r + 1$ten. Jedes von ihnen, gibt, nach geschehener Substitution, einen Theil zum $r + 1$ten Gliede der Totalreihe her. So entspringt aus dem Anfangsgliede, der gegebenen Reihe, $\frac{n}{\beta} X x^n$, wenn man für x^n seinen fingirten Werth setzt, die erste Partialreihe, deren $r + 1$tes Glied, $\frac{n}{\beta} X . \overset{r+1}{Y}$ zum Coeffizienten haben, und darin den ersten Beytrag zum Coeffizienten des $r + 1$ten Gliedes in der Totalreihe abgeben wird. Allgemein, es entspringt aus dem $k$ten Gliede der gegebenen Reihe $\overset{k}{Y} x^{\beta + k\delta}$, wenn man in ihm für $x^{\beta + k\delta}$ den Werth setzt, welchen die Umkehrung hervorbringt, eine Reihe, deren $(r + 1 - k)$tes Glied hervorgehoben werden muß, wenn man den Theil, welchen es zum $r + 1$ten Gliede der Totalreihe abgeben kann, und welcher der Zahl nach der $k$te unter ihnen seyn wird, erhalten will. Sollte man würklich die fingirte Reihe $x^n = Y x^{\frac{nm}{\beta}} + \ldots \overset{r}{Y} y^{\frac{nm}{\beta} + \frac{mr\delta}{\beta}} \ldots$ nehmen, um aus ihr allmälig auch $x^{n+\delta} \ldots x^{n+k\delta} \ldots$ erst zu berechnen, und dann die Substitutionen dieser Größen

würklich auszuführen, so würde eine fast unerträgliche Arbeit entstehn. Dies ist aber auf unserm gegenwärtigen Standpuncte keinesweges noch nöthig. Denn wir haben angenommen, daß, wenn eine Reihe wie $y^m = X x^\beta + \overset{1}{X} x^{\beta+\delta} .. + \overset{r}{X} x^{\beta + r\delta} ..$ gegeben ist, und von irgend einer Potenz von x der Werth durch eine umgekehrte Reihe dargestellt werden sollte, jeder Coeffizient dieser Reihe, falls seine Zahl nicht über $r + 1$ hinausgeht, sogleich in einem independenten Ausdrucke dargestellt werden könne. Aber von allen den Potenzen von x, für welche wir hier die Werthe zu substituiren haben, die allererste abgerechnet, werden zu unsrer Absicht aus den sie ausdrückenden Reihen nur solche Glieder gefordert, deren Zahl geringer als $r + 1$ ist. Diese also dürfen wir, dem angenommenen Gesetze gemäß, als schon bekannt voraussetzen, und so wird die ganze Reihe von Theilen, woraus sich der $(r + 1)$te Coeffizient der Totalreihe bildet, nur eine einzige unbekannte Größe, nemlich $\overset{r+1}{Y}$ enthalten; so daß also, wenn man ihn $= 0$ setzt, der Werth von dieser berechnet, und folglich erforscht werden kann, ob die nemliche Regel, welche für die vorhergehenden Coeffizienten angenommen war, auch für den nächstfolgenden gültig ist.

Die Annahme, welche wir, durch Beobachtung an den Resultaten der würklichen Umkehrung geleitet, gemacht haben, war, dem Vorhergehenden gemäß, folgende. Wenn eine, nach Potenzen von x fortschreitende, Reihe, wie $y^m = X x^\beta + \overset{1}{X} x^{\beta + \delta} .. + \overset{r}{X} x^{\beta + r\delta} ..$ gegeben war, und nun eine umgekehrte Reihe, irgend eine willkührliche Potenz von x ausdrückend, gefordert wurde, wie $x^n = Y y^b + \overset{1}{Y} y^{b+d} ... + \overset{r}{Y} y^{b + rd}$, so sollte jeder Coeffizient dieser gesuchten Reihe, bis zum rten, folgendermaßen erhalten werden können. Die gegebene Reihe auf eine Potenz erhoben, deren Grad gefunden wird, wenn man den der

gesuchten Potenz von x, hier n, um ein Vielfaches von der Differenz ihrer folgenden Exponenten, welches durch die Zahl des verlangten Coeffizienten bestimmt wird, $r\delta$, vermehrt; diese Summe durch den Anfangsexponenten der gegebenen Reihe, dividirt, und dem Ganzen das — Zeichen gibt, $-\left(\frac{n + r\delta}{\beta}\right)$. Von dieser Potenz wird aber nur ein Coeffizient, und zwar von gleicher Zahl mit dem gesuchten, gefordert. Gibt man ihm als Factor noch einen Bruch bey, dessen Zähler, sich immer gleich, der Grad der Potenz von x ist, für welchen man die Umkehrung macht, dessen Nenner dieselbe Zahl bleibt, die vorher als Zähler des Bruchs vorgeschrieben wurde, welcher den Exponenten derjenigen Potenz bezeichnet, worauf die gegebene Reihe erhoben werden sollte, $\left(\frac{n}{n + r\delta}\right)$ so hat man für die gesuchte Reihe den verlangten Coeffizienten. Wir haben jetzt nur zu prüfen, ob diese Annahme, wenn sie für jeden Fall bis zum rten Coeffizienten gültig ist, auch für den nächstfolgenden statt finde.

Wenn wir also in der, aus der gegebenen abgeleiteten, Reihe

$$y^{\frac{mn}{\beta}} = \overset{\frac{n}{\beta}}{X} x^n + \overset{\frac{n}{\beta}}{\overset{1}{X}} x^{n+\delta} \ldots + \overset{\frac{n}{\beta}}{\overset{r}{X}} x^{n+r\delta} + \overset{\frac{n}{\beta}}{\overset{r+1}{X}} x^{n+(r+1)\delta}$$

statt der Potenzen von x, welche sie enthält, Reihen setzen sollen, wodurch, umgekehrt, die Werthe derselben ausgedrückt werden, so wissen wir schon für jede dieser Reihen, bis zum rten Gliede, wie ihre Coeffizienten gebildet seyn werden.

Suchen wir nun, für die Totalreihe, welche aus allen diesen Partialreihen entspringen wird, den Coeffizienten ihres $(r + 1)$ten Gliedes. Es ist bekannt, wie jede einzelne von ihnen dazu beytragen wird.

Die Partialreihe, welche aus dem Anfangsgliede $\overset{\frac{n}{\beta}}{X} x^n$ der potenziirten gegebenen entspringt, gibt ihr $(r + 1)$ten

Glied selbst zu diesem Inbegriff her. Wie der $(r+1)$te Coeffizient einer solchen umgekehrten Reihe, die x^n ausdrücken soll, gebildet seyn mag, ist noch unbekannt. Er mag also durch $\overset{r+1}{Y}$ ausgedrückt bleiben, so daß $\frac{n}{\beta}\overset{r+1}{X}.Y$ das Anfangsglied für den $(r+1)$ten Coeffizienten der Totalreihe seyn wird.

Die Partialreihe, welche aus dem ersten Gliede der potenziirten gegebenen, $\frac{n}{\beta}\overset{1}{X}.x^{n+\delta}$ entsteht, gibt ihr rtes Glied zu der nemlichen Absicht her. Dies aber können wir schon, unsrer Annahme zu folge, bestimmt angeben. Wir erheben die gegebene auf eine Potenz, deren Grad $-\left(\frac{n+\delta+r\delta}{\beta}\right)$ seyn wird, (da hier ein rter Coeffizient verlangt wird), nehmen daraus den rten Coeffizienten, und multipliciren ihn mit $\frac{n+\delta}{n+(r+1)\delta}$. So ist also das erste Glied für den Ausdruck des $(r+1)$ten Coeffizienten der Totalreihe $=\left(\frac{n+\delta}{n+(r+1)\delta}\right).\frac{n}{\beta}\overset{1}{X}.\overset{-\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right)}{\overset{r}{X}}$. Allgemein wird die Partialreihe, welche aus der Substitution in das kte Glied der potenziirten gegebenen, $\frac{n}{\beta}\overset{k}{X}x^{n+k\delta}$ ihren Ursprung nimt, ihr $(r+1-k)$tes Glied zu der gesuchten Summe beytragen lassen. Sein Coeffizient aber wird gefunden, wenn man die gegebene Reihe zu einer Potenz erhebt, welche, dem angenommenen Gesetze gemäß, [da die Potenz von x, woraus diese Reihe entsteht, vom Grade $n+k\delta$, und die Zahl des aus ihr verlangten Gliedes $(r+1-k)$ ist] zum Exponenten $-\left(\frac{n+k\delta+[r+1-k]\delta}{\beta}\right)=-\left(\frac{n+[r+1]\delta}{\beta}\right)$ besitzt, von dieser Reihe das $(r+1-k)$te Glied seinen Coeffi-

zienten hergeben läßt, und ihn mit $\frac{n+k\delta}{n+(r+1)\delta}$ multiplicirt. Es ist allgemein das k^{te} Glied für den Ausdruck des $(r+1)^{ten}$ Coeffizienten unsrer Totalreihe $\frac{n+k\delta}{n+(r+1)\delta} \cdot \frac{n}{\beta} \overset{r}{X} \cdot {}^{k}\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right) \overset{r+1\cdot k}{X}$.

Die Partialreihe endlich, welche aus dem $r+1^{ten}$ Gliede der potenzirten gegebenen, $\frac{n}{\beta}\overset{r+1}{X}x^{n+(r+1)\delta}$ hervorgeht, gibt zu diesem Ausdrucke den letzten Beytrag. Es ist von der Reihe, wodurch sich $x^{n+(r+1)\delta}$ in der Umkehrung entwickelt, das Anfangsglied, woraus er herrührt. Man erhebe also die gegebene auf eine Potenz, deren Exponent = $\left[\frac{n+(r+1)\delta+0.\delta}{\beta}\right]$ ist, hebe daraus den Coeffizienten des Anfangsgliedes hervor, und gebe ihm den Factor $\frac{n+(r+1)\delta}{n+(r+1)\delta}$. So ist also dieser letzte Beytrag

$$=\frac{n+(r+1)\delta}{n+(r+1)\delta}\cdot\frac{n}{\beta}\overset{r+1}{X}\cdot\left[\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right]X.$$

Jetzt also haben wir vollständig den Ausdruck, welcher für den $r+1^{ten}$ Coeffizienten der Totalreihe gehört, die man erhält, wenn in der angenommenen,

$$y^{\frac{mn}{\beta}}=\frac{n}{\beta}Xx^{n}+\frac{n}{\beta}\overset{1}{X}x^{n+\delta}\ldots+\frac{n}{\beta}\overset{r}{X}x^{n+r\delta},$$

für x in jedem Gliede dessen, durch Umkehrung zu findender, nach Potenzen von y fortschreitender, Werth gesetzt wird. Wir sind berechtigt, diesen Coeffizienten = 0 zu setzen. Dadurch aber gelangen wir zu einer Gleichung, in welcher von der fingirten Reihe für x^{n} nur ein einziger unbekannter

Coeffizient, der (r + 1)te nemlich, neben lauter gegebenen Größen vorkommt, woraus sich also der Werth des ersteren finden lassen muß.

Es ist also, wenn wir zur augenblicklichen Abkürzung für $\frac{\beta}{n} = f$, und für $-\left[\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right] = g$ setzen, mithin

$$n+(r+1)\delta = -\beta g;\quad o = {}^{f}X.\overset{r+1}{Y} + \left(\frac{n+\delta}{-g\beta}\right){}^{f}\overset{1}{X}.{}^{g}\overset{r}{X}.. + \left(\frac{n+k\delta}{-g\beta}\right){}^{f}\overset{k}{X}.{}^{g}\overset{r+1-k}{X}..+\left[\frac{n+(r+1)\delta}{-g\beta}\right]{}^{f}\overset{r+1}{X}\,{}^{g}X.$$

Wir transponiren das Anfangsglied des ganzen Ausdrucks, weil es die eigentliche unbekannte Größe enthält. Alsdann bleibt als Werth von ${}^{f}X.\overset{r+1}{Y}$ die Form

$$\frac{(n+\delta)\,{}^{f}\overset{1}{X}\,{}^{g}\overset{r}{X}..+(n+k\delta)\,{}^{f}\overset{k}{X}.{}^{g}\overset{r+1-k}{X}..+(n+r\delta)\,{}^{f}\overset{r+1}{X}\,{}^{g}X}{g\beta}$$

Es mag auf beyden Seiten der Gleichung, der Symmetrie wegen, noch das Glied $\frac{n}{g\beta}.{}^{f}X.{}^{g}\overset{r+1}{X}$ hinzugesetzt werden, so daß also auf der ersten Seite $\frac{n}{g\beta}.{}^{f}X.{}^{g}\overset{r+1}{X} + {}^{f}X.\overset{r+1}{Y}$, auf der andern Seite die vorige Form, mit diesem Gliede, als Anfangsgliede, vermehrt, vorhanden seyn wird.

Was aber diese Form betrifft, so läßt sie sich durch Hülfe des letzten Satzes in der Lehre von der Substitution sehr zusammenziehn. Wir haben hier, wie dort, eine Reihe, welche schon als Potenz einer andern gedacht wird,

$${}^{f}X.x^{n} + {}^{f}\overset{1}{X}x^{n+\delta}..+{}^{f}\overset{r}{X}x^{n+r\delta}$$

Wir haben eine zweyte, welche eine andre Potenz derselben Grundform ist, und wovon die Coeffizienten durch ${}^{f}X$, ${}^{f}\overset{1}{X}$, .. ${}^{f}\overset{r}{X}$, ... angedeutet sind. Die vor uns lie-

gende Form deutet den $(r+1)$ten Coeffizienten eines Products an, welches aus der ersten, nachdem jedes ihrer Glieder mit dem Exponenten der in ihm liegenden Potenz multiplicirt ist, in die zweyte gemacht werden könnte. Statt dieses Products darf also, jenem Satze gemäß, $\left(\frac{n.[f+g]+f.[r+1]d}{f+g}\right)^{f+g}\overset{r+1}{X}$ gesetzt werden.

Nun aber ist $f=\frac{n}{\beta}$, $g=-\left(\frac{n+[r+1]\delta}{\beta}\right)$. Mithin wird $n.(f+g)+f.(r+1)\delta=\left(n.-\frac{(r+1)\delta}{\beta}\right)$ $+\left(\frac{n}{\beta}.(r+1)\delta\right)=o$. Es fällt also die ganze Form auf der andern Seite des Gleichheitszeichens völlig weg, man erhält also $\frac{n}{g\beta}.{}^fX.{}^g\overset{r+1}{X}+{}^fX.\overset{r+1}{Y}=o$. Daraus aber folgt sogleich $\overset{r+1}{Y}=-\frac{n}{g\beta}.{}^g\overset{r+1}{X}$, d. h. wenn für g sein bekannter Werth gesetzt wird, $\overset{r+1}{Y}=\left(\frac{n}{n+(r+1)\delta}\right).{}^{-\left(\frac{n+(r+1)\delta}{\beta}\right)}\overset{r+1}{X}$. Und auf diese Art ist die Gültigkeit des beobachteten Gesetzes für jeden folgenden Coeffizienten dargethan. Die würkliche Rechnung hat es für die beyden ersten factisch bewiesen, es gilt also nun in völliger Allgemeinheit.

Es gibt gewiß nicht leicht irgend eine formale Rechnungsregel in der Arithmetik, die, verglichen mit der Zusammengesetztheit des Gegenstandes, so einfach, und in Absicht auf den Gebrauch so weitumfassend wäre, als diese, eben bewiesene, independente Regel der Umkehrung. Sie gibt das erste Beyspiel eines Falls, wobey die independente Coeffizientenbestimmung ohne Vergleich einfacher ist als die recurrirende. Wir wollen sie, in Zeichen zusammengezogen, als Resultat der bisherigen Betrachtungen zusammenfassen.

Es sey von einer beliebigen Potenz einer gewissen Hauptgröße der Werth durch eine Reihe gegeben, die nach unbestimmten, nur in irgend einer arithmetischen Progression befindlichen, Potenzen einer zweyten Hauptgröße fortgeht:

$$y^m = Xx^{\beta} + \overset{1}{X}x^{\beta+\delta} \ldots \overset{r}{X}x^{\beta+r\delta} \ldots$$

Man sucht irgend eine willkührlich angenommene Potenz der zweyten Hauptgröße, durch eine Reihe, die auf ähnliche Weise nach Potenzen der ersten fortschreitet, so daß sowohl deren Form, als auch die Coeffizienten, aus den in der ersten Reihe gegebenen Größen abgeleitet werden sollen. Es sey z. E. x^n. Alsdann ist

$$x^n = {}^{-\frac{n}{\beta}}X x^{\frac{nm}{\beta}} + \left(\frac{n}{n+\delta}\right) \cdot {}^{-\left(\frac{n+\delta}{\beta}\right)}\overset{1}{X} x^{\frac{nm+m\delta}{\beta}}$$

$$+ \left(\frac{n}{n+2\delta}\right) \cdot {}^{-\left(\frac{n+2\delta}{\beta}\right)}\overset{2}{X} x^{\frac{nm+2m\delta}{\beta}} \ldots$$

$$+ \left(\frac{n}{n+r\delta}\right) \cdot {}^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)}\overset{r}{X} \cdot x^{\frac{nm+rm\delta}{\beta}} \ldots$$

Der einfachste unter ihr enthaltene Fall, zugleich aber derjenige, welcher am häufigsten vorkommen wird, ist der, wo m, n, β, δ, sämmtlich $= 1$ sind.

Wenn also, um für ihn die allgemeine Formel zu specialisiren

$$y = Xx + \overset{1}{X}x^1 + \ldots \overset{r}{X}x^r \ldots$$

gegeben ist, und man umgekehrt x durch eine Reihe verlangt, welche nach Potenzen von y fortgeht, so wird

$$y = {}^{-1}Xx + \tfrac{1}{2} \cdot {}^{-2}\overset{1}{X}x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot {}^{-3}\overset{2}{X}x^3 \ldots + \tfrac{1}{n} \cdot {}^{-n}\overset{n-1}{X}x^n + \ldots$$

Wollte man, etwas allgemeiner, die nte Potenz von x haben, so wäre $x^n = {}^{-n}Xy^n + \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot {}^{-(n+1)}\overset{1}{X}y^{n+1} \ldots + \left(\frac{n}{n+r}\right) \cdot {}^{-(n+r)}\overset{r}{X}y^{n+r} \ldots$ Die Mühe der würklichen

Berechnung bleibt freylich noch immer groß genug. Indessen kommt sie offenbar, selbst in dem verwickeltsten Falle, auf bloße Potenzirung der gegebenen Reihe zurück. Insofern ließe denn in der That unsre gefundene Regel noch einen andren, weiter zurückgeführten Ausdruck zu. Man könnte, statt der einzelnen Coeffizienten, welche sie aus vorgeschriebenen Potenzen der gegebenen Reihe fordert, deren combinatorisch ausgedrückte Werthe, den Formeln des polynomischen Lehrsatzes gemäß, an die Stelle setzen. Da aber dadurch keine weitere Zusammenziehung der Ausdrücke möglich wird, und es als bekannt vorausgesetzt werden darf, wie Coeffizienten einzelner Glieder von Potenzen gegebener Reihen berechnet werden müssen, so kann diese Zurückführung sehr wohl unterbleiben. Bey einer würklich gegebenen, individuell bestimmten Reihe, wird man, wenn sie umgekehrt werden soll, vor allen Dingen nachzuforschen haben, ob sich nicht das allgemeine Gesetz für die Form, wodurch eine unbestimmte Potenz von ihr ausgedrückt werden mag, gleichfalls individuell angeben läßt. Ist dies erreicht, so wird sich augenblicklich für jede Potenz der Hauptgröße, wonach sie fortschritt, die deren Werth ausdrückende umgekehrte Reihe allgemein darstellen lassen.

Es verdient in Beziehung auf die allgemeine Reversionsformel wohl bemerkt zu werden, daß es Fälle gibt, wo sie Ausnahmen leidet. Wenn die gegebene Reihe mit einem Gliede anhebt, welches die Hauptgröße gar nicht enthält, wenn also in unsern letzten Zeichen, $\beta = o$ ist, so fällt, wie schon oben bemerkt worden, die Umkehrung auf dem Wege unsrer Regel weg. In solchem Falle bleibt nichts übrig, als statt der zweyten Hauptgröße ein neues Zeichen einzuführen. Die Reihe

$$y^m = X + \overset{1}{X} x^{\delta} + \ldots \overset{r}{X} x^{r\delta} \ldots$$

läßt sich geradezu nicht umkehren. Setzt man aber

$y^m - X = u$, mithin $u = \overset{1}{X} x^\delta + .. \overset{r}{X} x^{r\delta}$ .. so ist es allerdings möglich, x, oder eine beliebige Potenz dieser Größe, durch eine Reihe darzustellen, die nach Potenzen von u fortschreitet. Hat man sie, so ist es gestattet, in ihr für u seinen Werth, $y^m - X$ zurückzusetzen. Dadurch entsteht zuletzt allerdings eine Reihe, die nach Potenzen von y fortschreitet. Aber die Coeffizienten dieser Reihe werden jeder selbst eine unendliche Reihe werden, und so ist wenig mit der ganzen Entwicklung gewonnen, wenn nicht diese Coeffizientenreihen entweder auf geschlossene Ausdrücke zurückgeführt, oder convergirend gemacht werden können.

In jedem andern Falle ist es allemal möglich, die Umkehrung nach unsrer Regel zu vollführen, und die gesuchte Reihe, wenn man ihre Form nach dieser Regel bestimmt hat, wird mögliche, unzweydeutige Coeffizienten erhalten, falls nicht etwa der ihres Anfangsgliedes, welcher in der That nach Umständen unmöglich oder vieldeutig seyn kann, indem er sich in die Werthe der folgenden einmischt, ihnen seine Beschaffenheit mittheilt. Aber dabey kann es Fälle geben, wo unsre independente Coeffizientenbestimmung keine Anwendung zu finden scheint. Der allgemeine Ausdruck für den rten Coeffizienten der aus der Umkehrung entstandenen Reihe hatte als Factor $\left(\frac{n}{n + r\delta}\right)$, neben einem Coeffizienten der Potenz des Grades $-\left(\frac{n + r\delta}{\beta}\right)$ von der gegebenen Reihe. Hier sind offenbar Fälle denkbar, wo dieser Ausdruck ungereimt scheint; es wird jedesmal eintreten, wenn $n + r\delta = o$, also $n = -r\delta$. Denn alsdann wird zwar nicht die geforderte Potenz der gegebenen Reihe (welche die ote seyn soll), aber wohl der Factor, welcher den aus ihr herausgerissenen Coeffizienten begleiten soll, $\frac{n}{o}$, ein arithmetisch ungereimter Ausdruck.

In allen Fällen also, wo die Potenz der zweyten Hauptgröße, x, welche man verlangt, einen Grad haben soll, der das Umgekehrte von irgend einem Vielfachen der Differenz ist, welche in der Progression der Exponenten, die in der gegebenen Reihe liegen, stattfindet, kann die independente Regel der Reversion nicht angewendet werden, obgleich allerdings eine Umkehrung möglich ist, und auf dem recurrirenden Wege die Coeffizienten-Bestimmung durchaus keine Schwierigkeit finden würde. In solchem Falle wird man aber doch nicht gezwungen seyn, die recurrirende Bestimmung als das einzige Hülfsmittel zu ergreifen. Wenn x^{+n} nicht geradezu gefunden werden kann, so berechne man zuerst x^{-n}. Wenn für irgend einen Werth von r die Größe $n + r\delta = o$ geworden ist, so wird ebendeswegen $-n + r\delta$ niemals $= o$ werden können. Die Regel der independenten Bestimmung gibt also unfehlbar alle Coeffizienten der Reihe, welche x^{-n} durch Umkehrung darstellt. Hat man diese Reihe zu soviel Gliedern, als die eigentlich gesuchte enthalten sollte; so erhebe man sie zur Potenz des Grades -1, oder finde, nach den bekannten Regeln der Division $\frac{1}{x^{-n}}$. Auf diesem, freylich etwas indirecten Wege, wird sich dennoch das Verlangte erhalten lassen.

Man kann indessen, ohne so viele Umständlichkeit, und aus der independenten Formel selbst geradezu, das Gesuchte dennoch erhalten, wenn man sich eine Art des Rechnens erlauben will, die in der That den allgemeinen Regeln völlig gemäß ist, und insofern keiner weiteren Rechtfertigung bedarf. Wenn $n + r\delta = o$, so gibt allerdings eine Potenz der Reihe $Xx^{\beta} + Xx^{\beta+\delta} .. + Xx^{\beta+r\delta} ..$, deren Exponent $-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)$ seyn soll, den Totalwerth der Potenzirung $= 1$, so daß also alle folgende Coeffizienten in seinem Ausdrucke $= o$ seyn müssen. Niemand würde sich also die

Mühe geben, nach der allgemeinen Formel des polynomischen Lehrsatzes von $\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)\overset{r}{X}$ den Werth darzustellen, falls er wüßte, daß $\frac{n+r\delta}{\beta}=o$ seyn sollte. Allerdings würde der berechnete Werth dieses Coeffizienten, wenn man ihn erst, ohne $\frac{n+r\delta}{\beta}$ zu bestimmen, suchte, und hernach in ihm $n+r\delta=o$ setzte, weil alle Theile desselben den Factor $n+r\delta$ unfehlbar enthalten, auch so $=o$ gefunden werden. Und in der That muß diese Berechnung unternommen werden. Denn man hat dem Coeffizienten noch außerdem $\frac{n}{n+r\delta}$ als Factor beygegeben; ein Ausdruck, welcher für sich, wenn $n+r\delta=o$ gesetzt wird, alle arithmetische Bedeutung verliert. Man hebe aber den Divisor, welcher in ihm vorkommt, gegen den Factor, welchen alle Theile des Coeffizienten enthalten, und das, was übrig bleibt, wird eine reelle, unzweydeutige Größe seyn. Es ist leicht, sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Nennen wir zur Abkürzung $\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)=p$, so ist, nach der bekannten Regel des polynomischen Lehrsatzes von $(\overset{}{X}x^{\beta}+\overset{1}{X}x^{\beta+\delta}..)^{p}$ der Coeffizient des $r$ten Gliedes $={}^{1..r}\Sigma(\overset{h}{{}^{p}\mathfrak{B}}\overset{h}{X}{}^{p\cdot h}\,p\,.\,{}^{r}\overset{h}{C})$. Setzt man für $\overset{h}{{}^{p}\mathfrak{B}}$ seinen Werth $\frac{p\,.\,(p-1)\,..\,[p-(h-1)]}{1\,.\,2\,.\,.\,h}$ an die Stelle, und sondert man, weil ihn alle Binomialcoeffizienten gemeinschaftlich haben, den Factor p ab, so wird jener Coeffizient, da er noch außerdem durch $\frac{n}{n+r\delta}$ multiplicirt werden soll,

$p\cdot\left(\frac{n}{n+r\delta}\right)^{1..p}\overset{h}{\Sigma}\left[\frac{(p-1)..[p-(h-1)]}{1\,.\,2\,.\,.\,h}X^{p\cdot h}\,p\,{}^{r}\overset{h}{C}\right]$. Nun

war $p = -\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)$; es ist also $p \cdot \left(\frac{n}{n+r\delta}\right) = -\frac{n}{\beta}$.
Es soll ferner $p = a$ seyn. Der Coeffizient $\frac{(p-1) \ldots [p-(h-1)]}{1 \cdot 2 \ldots h}$
reducirt sich also auf $\frac{(-1)^{h-1}}{h}$; es wird also

$$\left(\frac{n}{n+r\delta}\right)^{-\left(\frac{n+r\delta}{\beta}\right)} \overset{n}{X} = \left(\frac{-n}{\beta}\right)^{1 \ldots r} \Sigma\left(\frac{[-1]^{h-1}}{h} X^{-h} p^r \overset{h}{C}\right)$$

für den Fall, wo $n + r\delta = 0$ seyn soll. Mit dieser nähern Bestimmung kann man die Regel der independenten Coeffizientenbestimmung für die aus der Umkehrung erfolgende Reihe auch in allen den Fällen gebrauchen, wo sie auf den ersten Blick gar nicht anwendbar erschien. Nur der eine Fall, wo $\beta = 0$, gehört nicht hieher, und für ihn bleibt es bey dem vorhin Gesagten.

Sechszehntes Kapitel.

Von den Entwicklungen, die durch Umkehrung der Reihen möglich werden.

Eine noch viel allgemeinere Aufgabe, als diejenige, welche zur Umkehrung der Reihen Veranlassung gab, ist die folgende. Man hat eine Gleichung zwischen zwey Hauptgrößen, in welcher irgend eine Function der einen (d. h. irgend ein arithmetischer Ausdruck, welcher sich aus ihr und andern bekannten Nebengrößen gebildet hat), einer beliebigen Function der andern gleich gesetzt wird. Man verlangt den Werth, welchen eine, gleichfalls willkührliche, Function der einen von diesen beyden Hauptgrößen erhalten wird, durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen der andern Hauptgröße

fortschreitet. Man bedient sich der Zeichen φ, ψ, χ, indem man sie vor die Zeichen gewisser Hauptgrößen setzt, um dadurch den unbestimmten Begriff von beliebigen Functionen dieser Größe im Allgemeinen anzudeuten. So lautet also die obige Aufgabe in Zeichen: Man hat die Gleichung $\varphi(x) = \psi(y)$ und verlangt nun $\chi(y)$ durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe.

Es ist möglich, für die Auflösung dieser Aufgabe eine allgemeine Regel zu geben, insofern sich jede der drey Functionen, wovon hier die Rede ist, in eine Reihe, die nach Potenzen der in ihr enthaltenen Hauptgröße, mit Exponenten, die in irgend einer arithmetischen Progression fortschreiten, entwickeln läßt. Die Regeln solcher Entwicklungen gibt die ganze vorhin vorgetragene Theorie. Wir nehmen also hier an, daß

$$\varphi(x) = X x^{\alpha} + \overset{1}{X} \alpha^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{X} x^{\alpha+rd} \ldots$$

$$\psi(y) = Y y^{\beta} + \overset{1}{Y} y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y} y^{\beta+r\delta} \ldots$$

$$\chi(y) = \mathfrak{Y} y^{\gamma} + \overset{1}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma+\Delta} \ldots + \overset{r}{\mathfrak{Y}} x^{\gamma+r\Delta} \ldots$$

gegebene Größen sind.

Der Gang der Arbeit selbst, welche nöthig ist, um $\chi(y)$ durch eine Reihe darzustellen, welche nach Potenzen von x fortschreitet, wird folgender seyn.

Man nenne für den Augenblick $\psi(y) = u$. So hat man, weil $\varphi(x) = \psi(y)$ seyn sollte, zuerst:

$$u = Y . y^{\beta} + \overset{1}{Y} y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y} y^{\beta+r\delta} \ldots$$

Nun kann man, vermöge der Reversionsformel, für jede Potenz von y den Werth durch eine Reihe finden, die nach Potenzen von u fortschreitet. Man kann also jedes Glied der dritten Reihe, welche $\chi(y)$ darstellt, auf diese Weise durch eine nach Potenzen von u fortschreitende Form darstellen. Ist dieses geschehn, so braucht man nur zu bedenken, daß $u = \psi(y)$, zugleich $= \varphi(x)$ war, mithin der Werth

von u auch durch die Reihe für $\varphi(x) = Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+\delta} \ldots + \overset{r}{X}x^{\alpha+r\delta} \ldots$ dargestellt werden kann. Man setze also in jedem Gliede der Form, welche $\chi(y)$, nach Potenzen von u fortschreitend, gegeben hat, für u diese letzte Reihe an die Stelle. So entwickelt sie sich in lauter Reihen, wovon jede selbst nach Potenzen von x fortgeht, und man erhält in dem Inbegriffe derselben den verlangten Werth für $\chi(y)$ durch eine Reihe entwickelt, in deren einzelnen Gliedern nur Potenzen von x mit bestimmten Coeffizienten vorkommen werden.

So ist der Gang dieser Arbeit leicht beschrieben, und auf bekannte Regeln zurückgeführt. Aber die würkliche Ausführung ist mit unvermeidlicher Weitläuftigkeit verbunden; die Form des Resultats wird zusammengesetzt, und der allgemeine Ausdruck desselben in Zeichen kann nicht anders als sehr verwickelt ausfallen.

Was den Anfang der Arbeit betrifft, wo aus der gegebenen Reihe, $u = Yy^{\beta} + \overset{1}{Y}y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta}$, durch Umkehrung, für mehrere, nachher genauer zu bestimmende, Potenzen von y, Reihen, die nach Potenzen von u fortgehn, abgeleitet werden sollen, so ist dies zwar, der allgemeinen Reversionsformel gemäß, unbedingt möglich, aber jede dieser Reihen wird eine eigene Progression der Exponenten bekommen, und also an eine fernere Addition derselben im Allgemeinen nicht zu denken seyn.

Wenn man also zweytens verlangt, die bekannte Reihe für $\chi(y) = \mathfrak{Y}y^{\gamma} + \overset{1}{\mathfrak{Y}}y^{\gamma+\Delta} \ldots + \overset{r}{\mathfrak{Y}}y^{\gamma+r\Delta} \ldots$ zu nehmen, und in jedem Gliede von ihr, statt der Potenz von y, die es enthält, eine, durch die eben vorhin bezeichnete Umkehrung zu findende, Reihe, die nach Potenzen von u fortgeht, zu setzen, so kann es geschehn, aber diese Reihen werden sich

nicht durch würkliche Addition gleichhoher Glieder in eine Totalreihe bringen lassen, sondern neben einander als Theile, deren Vereinigung nur angedeutet werden kann, stehn bleiben. Wollte man also den Werth von $\chi(y)$ in einem allgemeinen Ausdruck zusammenfassen, so müßte man für jede Reihe, welche es als Theil in sich enthält, einen allgemeinen Ausdruck geben, woraus die Bildung ihrer einzelnen Glieder erkannt werden könnte. Nun entspringt die rte unter den Reihen, welche den Werth von $\chi(y)$ ausmachen, aus dem rten Gliede der für $\chi(y)$ gegebenen Reihe, $\overset{r}{\mathfrak{Y}} y^{\gamma + r\Delta}$, wenn man in ihm für die Potenz von y, welche es enthält, den Werth setzt, welcher aus der Umkehrung der Reihe $u = \mathfrak{Y} y^{\beta} + \overset{1}{\mathfrak{Y}} y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{\mathfrak{Y}} y^{\beta + r\delta} \ldots$ erhalten werden kann. Dem bekannten Gesetze der Umkehrung gemäß entwickelt sich $y^{\gamma + r\Delta}$ in eine Reihe, von welcher unbestimmt das qte Glied seyn wird:

$$\left(\frac{\gamma + r\Delta}{\gamma + r\Delta + q\delta}\right) \cdot {}^{-\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right)} \overset{q}{Y} u^{\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}}$$

Man gebe ihm den Factor, welchen $y^{\gamma + r\Delta}$ bey sich führt, und man erhält das qte Glied der rten Reihe, woraus $\chi(y)$ zusammengesetzt ist:

$$\overset{r}{\mathfrak{Y}} \cdot \left(\frac{\gamma + r\Delta}{\gamma + r\Delta + q\delta}\right) \cdot {}^{-\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right)} \overset{q}{Y} \cdot u^{\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}}$$

Man hat in der That in diesem Ausdruck das ganze Gesetz der Entwicklung von $\chi(y)$. Diese Größe setzt sich aus Gliedern zusammen, von deren jedes eine Reihe ist, welche nach Potenzen von u fortgeht. Alle diese Reihen sind in Absicht auf die Bildung ihrer Glieder einem gemeinschaftlichen Gesetze unterworfen. Will man die erste Reihe haben, so setze man $r = 0$, und man wird, wenn allmälig alsdann für q die

Werthe; 0, 1, 2, u. s. w. gesetzt werden, ihre successiven Glieder nach der Reihe bekommen. Verlangt man die [illegible] nach ihr, so setze man $r = 1$, und verfahre wie vorhin. Auf diese Art fortschreitend, wird man allmälig aus unserm Ausdrucke den vollständigen Werth von $\chi(y)$ entwickeln können.

Aber nun ist noch der letzte Theil der Arbeit zurück. Die Größe u, nach welcher die einzelnen Glieder der Reihen fortschreiten, ist selbst eine Form, welche nach Potenzen von x fortgeht. Man muß also für sie noch ihren Werth $u = X x^{\alpha} + X x^{\alpha + d} \ldots + X x^{\alpha + kd} \ldots$ setzen. Alsdann wird sich jedes Glied aus allen den Reihen, welche vereint den Werth von $\chi(y)$ ausmachen, selbst wieder in eine unendliche Reihe entwickeln. Allgemein: aus dem $q$ten Gliede der $r$ten Reihe, welche $\chi(y)$ in sich faßt, wird, insofern es von u die Potenz $u^{\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}}$ enthält, wenn man für u seinen Werth substituirt, eine neue Reihe entstehn, von welcher allgemein das $k$te Glied durch $\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta} \overset{k}{X}$

$$x^{\alpha\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right) + kd}$$

angedeutet werden kann.

So ist also der Werth von $\chi(y)$, wenn wir Alles in einen Ausdruck zusammen fassen wollen, eine Zusammenstellung mehrerer Reihen, von denen aber jedes Glied selbst wieder durch eine unendliche Reihe dargestellt werden muß. Will man für die $r$te Reihe, woraus $\chi(y)$ besteht, das $q$te Glied wissen, so ist dasselbe eine Reihe, in welcher unbestimmt der $k$te Theil durch

$$\overset{r}{\mathfrak{Y}} \cdot \left(\frac{\gamma + r\Delta}{\gamma + r\Delta + q\delta}\right)^{-\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right)} \overset{q}{Y} \cdot \frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta} \overset{k}{X}$$

$$x^{\alpha\left(\frac{\gamma + r\Delta + q\delta}{\beta}\right) + kd}$$

ausgedrückt werden kann.

In der That enthält diese Formel Alles, was zur Auflösung einer so verwickelten und allgemeinen Aufgabe, wie die angenommene, irgend erforderlich seyn kann. Im Allgemeinen ist bey ihr keine weitere Zusammenziehung möglich. Sie verlangt offenbar nichts weiter als einzelne Coeffizienten aus Potenzen eines vorgeschriebenen Grades, von gegebenen Formen, kann also durch Hülfe des polynomischen Lehrsatzes immer realisirt werden. In particulären Fällen ist aber allerdings eine Vereinfachung gestattet, so daß die Totalreihe, welche den Werth von $\chi(y)$ darstellt, in eine einzige nach Potenzen von x fortgehende, in welcher die Exponenten eine arithmetische Progression beobachten, zusammengezogen werden kann. Die in der Lehre von der Substitution gegebenen Bedingungen, unter denen die Totalreihen, welche durch Substitution von Reihen in Reihen entstehn, sich zu einer einzigen, ähnlich gebildeten, vereinigen, könnten sogleich dienen, um diese particulären Fälle weiter zu entwickeln.

Es mag nur einer von diesen Fällen, als Beyspiel, in genauere Betrachtung kommen.

Wie vorhin sey $\varphi(x) = Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+d} \ldots + \overset{r}{X}x^{\alpha+rd}$

und $\psi(y) = \varphi(x) = Yy^{\beta} + \overset{1}{Y}y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta}$

Man sucht, durch eine Reihe, die nach Potenzen von x fortgehn soll, y^{n}, unter einer Voraussetzung, welche für diese Größe eine Reihe darbietet, in welcher die Exponenten als Glieder einer einzigen arithmetischen Progression erscheinen.

Nennt man, wie vorhin, $\psi(y) = u$, so wird, durch Umkehrung der Reihe für $\psi(y)$, der Werth von y durch eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe gefunden, deren Exponenten nach der Progression $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}$, u. s. w. fortgehn. In dieser Reihe soll statt u die erste angenommene, $Xx^{\alpha} + \overset{1}{X}x^{\alpha+d} \ldots$ substituirt werden. Die einfachste Voraussetzung, unter welcher die aus dieser Substitution entspringenden Partialreihen sich würklich vereinigen, ist, daß $d = \frac{\alpha}{\beta}\delta$ sey. Nennen wir, zur Abkürzung $\frac{\alpha}{\beta} = c$, mithin $\alpha = c\beta$, so ist also die zu lösende Aufgabe folgende. Es ist

$$Xx^{c\beta} + \overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta} \ldots + \overset{r}{X}x^{c\beta+rc\delta} \ldots = Yy^{\beta} + \overset{1}{Y}y^{\beta+\delta} \ldots + \overset{r}{Y}y^{\beta+r\delta} \ldots$$

Man sucht y^{n} durch eine Reihe, die nach

Potenzen von x fortgeht. Heißt, wie vorhin, die zweyte Reihe u, so gibt die unmittelbare Anwendung der Reversionsformel für x^n eine Reihe, nach Potenzen von u fortgehend, deren hte Glied allgemein durch $\left(\frac{n}{n+h\delta}\right) \cdot \overset{-\left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)}{} \overset{h}{X} \cdot u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ ausgedrückt werden kann. Nun will man noch in dieser Reihe für u den Werth $Xx^{c\beta} + \overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta}$.. substituiren. So entsteht aus jedem Gliede von ihr eine neue Reihe, die sich aber mit den andern zu einer einzigen Totalreihe vereinigt. Zu dem rten Gliede dieser Totalreihe, welches $x^{nc+cr\delta}$ enthalten muß, trägt jedes Glied der ersten, nach Potenzen von u fortgehenden, vom Anfangsgliede an, bis zum rten einen Theil bey, mithin das hte Glied, welches $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ in sich schließt, den hten Theil zu jenes gesuchten Gliedes Coeffizienten. Es ist aber von $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}} = (Xx^{c\beta} + \overset{1}{X}x^{c\beta+c\delta}..)^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ das Glied, welches x^{nc+crd} enthalten wird, in seiner Reihe das (r-h)te. Sein Coeffizient ist, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, $\left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)\overset{r\text{-}h}{X}$. Man multiplicire ihn mit dem Factor, welchen $u^{\frac{n+h\delta}{\beta}}$ bey sich führte, und man hat für den Coeffizienten des rten Gliedes derjenigen Reihe, wodurch sich x^n berechnen läßt, den hten Theil =

$$\left(\frac{n}{n+h\delta}\right) \cdot \overset{-\left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)}{} \overset{h}{X} \cdot \left(\frac{n+h\delta}{\beta}\right)\overset{r\text{-}h}{X}.$$

Will man nach dieser Formel einen einzelnen Coeffizienten berechnen, so bestimme man zuerst seine Zahl, r. Alsdann setze man, ohne sie weiter zu ändern, für h allmälig alle ganze Zahlen nach der Reihe, auch o mitgerechnet, und man wird die successiven Glieder des Ausdrucks, welcher den gesuchten Coeffizienten bildet, erhalten.

Anhang I.

Einige für die Analysis besonders wichtige Tabellen und Formeln.

Erste

Die Binomialcoefficienten der ersten

Die Zahlen der nebeneinanderstehenden Columnen ge-
successiven ganzen positiven Potenzen; vertical genommen,
ven ganzen negativen. Die ganze Tabelle pflegt

Pot	-1 B	-2 B	-3 B	-4 B	-5 B	-6 B	-7 B	-8 B
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	792
6	1	7	28	84	210	462	924	1716
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
11	1	12	78	324	1365	4368	12376	31824
12	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388
13	1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
14	1	15	120	680	3060	11628	38760	116280
15	1	16	136	816	3876	15504	54264	170544
16	1	17	153	969	4845	20349	74613	245157
17	1	18	171	1140	5985	26334	100947	346104
18	1	19	190	1330	7315	33649	134596	480700
19	1	20	210	1540	8855	42504	177100	657800
20	1	21	231	1771	10626	53130	230230	888030
21	1	22	253	2024	12650	65780	296010	1184040
22	1	23	276	2300	14950	80730	376740	1560780
23	1	24	300	2600	17550	98280	475020	2035800
24	1	25	325	2925	20475	118755	593775	2629573
25	1	26	351	3276	23751	142506	736281	3365856
26	1	27	378	3654	27405	169911	906192	4282048
27	1	28	406	4060	31465	201376	1107568	5379616
28	1	29	435	4495	35960	237336	1344904	6724520
29	1	30	465	4960	40920	278256	1623160	8347680

Tabelle.

Potenzen mit ganzen Exponenten.

ben, diagonal genommen, die Binomialcoefficienten der
und dabey mit abwechselnden Zeichen, die der successi-
die der figurirten Zahlen genannt zu werden.

$^{-9}$B	$^{-10}$B	$^{-11}$B	$^{-12}$B	$^{-13}$B
1	1	1	1	1
9	10	11	12	13
45	55	66	78	91
165	220	286	364	455
495	715	1001	1365	1820
1287	2002	3003	4368	6188
3003	5005	8008	12376	18564
6435	11440	19448	31824	50388
12870	24310	43758	75582	125970
24310	48620	92378	167960	293930
43758	92378	184756	352716	646646
75582	167960	352716	705432	1352078
125970	293930	646646	1352078	2704156
203490	497420	1144066	2496144	5200300
319770	817190	1961256	4457400	9657700
490314	1307504	3268760	7726160	17383860
735471	2042975	5311735	13037895	30421755
1081575	3124550	8436285	21474180	51895938
5562275	4686825	13123110	34597290	86493225
2220075	6906900	20030010	54627300	141120525
3108105	10015005	30045015	84672315	225792840
4292145	14307150	44352165	129024480	354817320
5852925	20160075	64512240	193536720	548454040
7888725	28048800	92561040	286097760	834451800
10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700
13884156	52451256	183579396	600805296	1852482996
18156204	70607460	254186856	854992152	2707475148
23535820	94143280	348330136	1203322288	3910797436
30260340	124403620	472733756	1676056044	5586853480
38608020	163011640	635745396	2311801440	7898654920

Zweyte Tabelle.

Die zehn ersten Glieder einer unbestimmten Potenz eines möglichst allgemein ausgedrückten Polynomiums enthaltend.

$$(ax^{\beta} + bx^{\beta+\delta} + cx^{\beta+2\delta} + \ldots ix^{h+8\delta} + kx^{h+9\delta} + lx^{h+10\delta} \ldots)^{n}$$

$a^n x^{\beta n}$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} b x^{\beta n+\delta}$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} c$	$x^{\beta n+2\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2} b^2$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} d$	$x^{\beta n+3\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2}\, 2bc$	
$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n-3} b^3$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} e$	$x^{\beta n+4\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2} \left\{\begin{matrix}2bd\\ c^2\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n-3}\, 3b^2c$	
$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{n-4} b^4$	
${}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} f$	$x^{\beta 2+5\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2} \left\{\begin{matrix}2be\\ 2cd\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n-3} \left\{\begin{matrix}3b^2d\\ 3bc^2\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{n-4}\, 4b^3c$	
$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}} a^{n-5} b^5$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} g$	$x^{\beta n+6\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2} \left\{\begin{matrix}2bf\\ 2ce\\ d^2\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n-3} \left\{\begin{matrix}3b^2c\\ 6bcd\\ c^3\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{n-4} \left\{\begin{matrix}4b^3d\\ 6b^2c^2\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}} a^{n-5} .\, 5b^4c$	
$+{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}} a^{n-6} .\, b^6$	
$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n-1} h$	$x^{\beta n+7\delta}$
$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n-2} \left\{\begin{matrix}2bg\\ 2cf\\ 2de\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n-3} \left\{\begin{matrix}3b^2f\\ 6bce\\ 3bd^2\\ 3c^2d\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{n-4} \left\{\begin{matrix}4b^3e\\ 12b^2cd\\ 4bc^3\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}} a^{n-5} \left\{\begin{matrix}5b^4d\\ 10b^3c^2\end{matrix}\right.$	
$+{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}} a^{n-6} .\, 6b^5c$	
$+{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}} a^{n-7} .\, b^7$	

$$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,i$$

$$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{array}{l}2bh\\2cg\\2df\\e^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left\{\begin{array}{l}3b^{2}g\\6bcf\\6bde\\3c^{2}e\\3cd^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{array}{l}4b^{3}f\\12b^{2}ce\\6b^{2}d^{2}\\12bc^{2}d\\c^{4}\end{array}\right. \quad x^{n\beta+8\delta}$$

$$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{array}{l}5b^{4}e\\20b^{3}cd\\10b^{2}c^{3}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}\left\{\begin{array}{l}6b^{5}d\\15b^{4}c^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}.\,7b^{6}c$$

$$+{}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}}a^{n-8}.\,b^{8}$$

$$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,k$$

$$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{array}{l}2bi\\2ch\\2dg\\2ef\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left\{\begin{array}{l}3b^{2}h\\6bcg\\6bdf\\3be^{2}\\3c^{2}f\\6cde\\d^{3}\end{array}\right. \quad x^{n\beta+9\delta}$$

$$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{array}{l}4b^{3}g\\12b^{2}cf\\12b^{2}de\\12bc^{2}e\\12bcd^{2}\\4c^{3}d\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{array}{l}5b^{4}f\\20b^{3}ce\\10b^{3}d^{2}\\30b^{2}c^{2}d\\5bc^{4}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}}a^{n-6}\left\{\begin{array}{l}6b^{5}e\\30b^{4}cd\\20b^{3}c^{3}\end{array}\right. \quad x^{n\beta+9\delta}$$

$$+{}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}}a^{n-7}\left\{\begin{array}{l}7b^{6}d\\21b^{5}c^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}}a^{n-8}.\,8b^{7}c$$

$$+{}^{n}\overset{9}{\mathfrak{B}}a^{n-9}\,b^{9}$$

$$+{}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,l$$

$$+{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left\{\begin{array}{l}2bk\\2ci\\2dh\\2eg\\f^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left\{\begin{array}{l}3b^{2}i\\6bch\\6bdg\\6bef\\3c^{2}g\\6cdf\\3ce^{2}\\3d^{2}e\end{array}\right. \quad x^{n\beta+10\delta}$$

$$+{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left\{\begin{array}{l}4b^{3}h\\12b^{2}cg\\12b^{2}df\\6b^{2}e^{2}\\12bc^{2}f\\24bcde\\4bd^{3}\\4c^{3}e\\6c^{2}d^{2}\end{array}\right.$$

$$+{}^{n}\overset{5}{\mathfrak{B}}a^{n-5}\left\{\begin{array}{l}5b^{4}g\\20b^{3}cf\\20b^{3}de\\30b^{2}c^{2}e\\30b^{2}cd^{2}\\30bc^{3}d\\c^{5}\end{array}\right.$$

$$+ {}^{n}\overset{6}{\mathfrak{B}} a^{n-6} \left\{ \begin{array}{l} 6b^5 f \\ 30 b^4 c e \\ 15 b^4 d^2 \\ 60 b^3 c^2 d \\ 15 b^2 c^4 \end{array} \right| x^{n\delta+10\delta} \qquad + {}^{n}\overset{8}{\mathfrak{B}} a^{n-8} \left\{ \begin{array}{l} 8 b^7 d \\ 28 b^6 c^2 \end{array} \right.$$

$$+ {}^{n}\overset{7}{\mathfrak{B}} a^{n-7} \left\{ \begin{array}{l} 7 b^6 e \\ 42 b^5 c d \\ 70 b^4 c^3 \end{array} \right| \qquad + {}^{n}\overset{9}{\mathfrak{B}} a^{n-9} . 9 b^8 c \;\Big|\; x^{n\delta+10\delta} \qquad + {}^{n}\overset{10}{\mathfrak{B}} a^{n-10} . b^{10}$$

u. s. w.

III. Hülfstabelle zur Berechnung der Logarithmen im briggischen System.

Modul = 0,4342944819032518276 5 . .

	Zahl.	Logarithme.		Zahl.	Logarithme.
	9	95424 25094 39324 87459		9	00389 11662 36910 52172
	8	90308 99869 91943 58564		8	00346 05321 09506 48616
	7	84509 80400 14256 83071		7	00302 94705 53618 00717
	6	77815 12503 83643 63251	1,00	6	00259 79807 19908 59231
	5	69897 00043 36018 80479		5	00216 60617 56507 67623
	4	60205 99913 27962 39043		4	00173 37128 09000 52977
	3	47712 12547 19662 43730		3	00130 09330 20418 41880
	2	30102 99956 63981 19521		2	00086 77215 31226 91249
				1	00043 40774 79318 64267
	9	27875 36009 52828 96154		9	00039 06892 49910 [illegible]
	8	25527 25051 03306 06980		8	00034 72966 85363 [illegible]
	7	23044 89213 78273 92854		7	00030 38997 84812 49181
	6	20411 99826 55924 78085	1,000	6	00026 04985 47390 [illegible]
1,0	5	17609 12590 55681 24208		5	00021 70929 72230 [illegible]
	4	14612 90356 78238 02593		4	00017 36830 58464 [illegible]
	3	11394 33523 06836 76921		3	00013 02688 05227 06100
	2	07918 12460 47624 82772		2	00008 68502 11648 95723
	1	04139 26851 58225 04075		1	00004 34572 76862 66964
	9	03742 64979 40623 63520		9	00003 90847 44584 16739
	8	03342 37554 86949 70231		8	00003 47421 68884 03320
	7	02938 37776 85209 64083		7	00003 03995 49761 39869
1,0	6	02530 58652 64770 24085	1,0000	6	00002 60568 87215 39548
	5	02118 92990 69938 07279		5	00002 17141 81245 15514
	4	01703 33392 98780 35485		4	00001 73714 31849 80922
	3	01283 72247 05172 20517		3	00001 30286 39028 48926
	2	00860 01717 61917 56105		2	00000 86858 02780 32676
	1	00432 13737 82642 57428		1	00000 43429 23104 45319

	Zahl.	Logarithme.		Zahl.	Logarithme.
1,00000	9	00000 39086 32748 30828	1,00000000	9	00000 00039 08650 31954
	8	— — 34743 41957 87671		8	— — 00034 74355 84133
	7	— — 30400 50733 15761		7	— — 00030 40061 36268
	6	— — 26057 59074 15011		6	— — 00026 05766 88360
	5	— — 21714 66980 85333		5	— — 00021 71472 40409
	4	— — 17371 74433 26642		4	— — 00017 37177 92414
	3	— — 13028 81491 38850		3	— — 00013 02883 44376
	2	— — 08685 88095 21870		2	— — 00008 68588 96294
	1	— — 04342 94264 75016		1	— — 00004 34294 48169
1,000000	9	00000 03908 64857 82377	1,000000000	9	00000 00003 90865 03354
	8	— — 03474 35446 54844		8	— — 00003 47435 38538
	7	— — 03040 06030 93018		7	— — 00003 04006 13723
	6	— — 02605 76610 96898		6	— — 00002 60576 68906
	5	— — 02171 47186 66483		5	— — 00002 17147 24090
	4	— — 01737 17758 01775		4	— — 00001 73717 79273
	3	— — 01302 88325 02773		3	— — 00001 30288 34455
	2	— — 00868 58887 69476		2	— — 00000 86858 89637
	1	— — 00434 29446 01885		1	— — 00000 43429 44819
1,0000000	9	00000 00390 86501 61240	1,0000000000	9	00000 00000 39080 50337
	8	— — 00347 43557 16252		8	— — — — 34743 55855
	7	— — 00304 00612 66921		7	— — — — 30400 61373
	6	— — 00259 57668 13247		6	— — — — 26057 66891
	5	— — 00217 14723 55229		5	— — — — 21714 72409
	4	— — 00173 71778 92869		4	— — — — 17371 77928
	3	— — 00130 28834 26167		3	— — — — 13628 83446
	2	— — 00086 85889 55121		2	— — — — 08685 88964
	1	— — 00043 42944 79732		1	— — — — 04342 94482

Die weitere Fortsetzung bis: $1 + \frac{a}{10^{20}}$ ist offenbar überflüssig, da die Logarithmen dieselben bleiben, und nur allmälig jedesmal eine Decimalstelle hinab gehen, wenn der Nenner des a den nächst höheren Rang annimt, sobald dieser Rang über den zehnten hinaus geht.

IV. Hülfstabelle zur Berechnung natürlicher Logarithmen.

Basis = 2,7182818284590452353602 8..

Zahl.	Logarithme.
1 00000 00000 00000 00000	46,05170 18298 80913 68036
10000 — — — —	43,74911 67668 86867 99634
1000 — — — —	41,44653 16738 92822 31232
100 — — — —	39,14394 65808 98776 62831
10 — — — —	36,84130 14879 04730 94429
1 00000 00000 00000	34,53877 63949 10685 26027
10000 — — —	32,23619 13019 16639 57625
1000 — — —	29,93360 62089 22593 89223
100 — — —	27,63102 11159 28548 20822
10 — — —	25,32843 60229 34502 52420
1 00000 00000	23,02585 09299 40456 84018
10000 —	20,82326 58369 46411 15616
1000 —	18,42068 07439 52365 47214
100 —	16,11809 56509 58319 78813
10 —	13,81551 05579 64274 10411
1 00000	11,51292 54649 70228 42009
10000	9,21034 03719 76182 73607
1000	6,90775 52789 82137 05205
100	4,60517 01859 88091 36804
10	2,30258 50929 94045 68402

	Zahl.	Logarithme.
	9	2,19722 45773 36219 38279
	8	2,07944 15416 79835 92825
	7	1,94501 01490 55313 30511
	6	1,79175 94692 28055 00081
	5	1,60943 79124 34100 37460
	4	1,38629 43611 19890 61883
	3	1,09861 22886 68109 69140
	2	0,69314 71805 59945 30942
	1	
1,	9	0,64185 38861 72394 77599
1,	8	0,58778 56649 02119 00819
1,	7	0,53062 82510 62170 39623
1,	6	0,47000 36292 45735 55365
1,	5	0,40546 51081 08164 38198
1,	4	0,33647 22366 21212 93050
1,	3	0,26236 42644 67491 05204
1,	2	0,18232 15567 93954 62621
1,	1	0,09531 01798 04324 86004

	Zahl.	Logarithme.
1,0	9	0,08617 76962 41052 33234
1,0	8	0,07696 10411 39128 32498
1,0	7	0,06765 86484 73814 80527
1,0	6	0,05826 89081 23975 77553
1,0	5	0,04879 01041 60432 00307
1,0	4	0,03922 07131 53281 29627
1,0	3	0,02955 88022 41544 40273
1,0	2	0,01980 26272 96179 71303
1,0	1	0,00995 03308 53168 08285
1,00	9	0,00895 97413 71471 90444
1,00	8	0,00796 81696 49176 87351
1,00	7	0,00697 56137 36425 24210
1,00	6	0,00598 20716 77547 46378
1,00	5	0,00498 75415 11039 07361
1,00	4	0,00399 20212 69537 45300
1,00	3	0,00299 55089 79798 47881
1,00	2	0,00199 80026 62673 05602
1,00	1	0,00099 95003 33083 53317

Zahl.		Logarithme.	Zahl.		Logarithme.
1,000	9	0,00089 95952 42836 02301	1,0000000	9	1,00000 00899 99995 95000
	8	0,00079 96801 70564 33216		8	— — 00799 99996 80000
	7	0,00069 97551 14273 34191		7	— — 00699 99997 55000
	6	0,00059 98200 71967 61553		6	— — 00599 99998 20000
	5	0,00049 98750 41651 04792		5	— — 00499 99998 75000
	4	0,00039 99200 21326 93537		4	— — 00399 99999 20000
	3	0,00029 99550 08997 97548		3	— — 00299 99999 55000
	2	0,00019 99800 02666 26672		2	— — 00199 99999 80000
	1	0,00009 99950 00333 30834		1	— — 00099 99999 95000
1,0000	9	0,00008 99959 50242 98360	1,00000000	9	0,00000 00089 99999 95950
	8	0,00007 99968 00170 55043		8	— — 00079 99999 96800
	7	0,00006 99975 50114 32734		7	— — 00069 99999 97550
	6	0,00005 99982 00071 99076		6	— — 00059 99999 98200
	5	0,00004 99987 50041 66511		5	— — 00049 99999 98750
	4	0,00003 99992 00021 33269		4	— — 00039 99999 99200
	3	0,00002 99995 50008 99979		3	— — 00029 99999 99550
	2	0,00001 99998 00002 66663		2	— — 00019 99999 99800
	1	0,00000 99999 50000 33333		1	— — 00009 99999 99950
1,00000	9	0,00000 89999 59500 24300	1,000000000	9	0,00000 00008 99999 99959
	8	— — 79999 68000 17067		8	— — 00007 99999 99968
	7	— — 69999 75500 11433		7	— — 00006 99999 99975
	6	— — 59999 82000 07200		6	— — 00005 99999 99982
	5	— — 49999 87500 04167		5	— — 00004 99999 99987
	4	— — 39999 92000 02133		4	— — 00003 99999 99992
	3	— — 29999 95500 00900		3	— — 00002 99999 99995
	2	— — 19999 98000 00267		2	— — 00001 99999 99998
	1	— — 09999 99500 00033		1	— — 00000 99999 99999
1,000000	9	0,00000 08999 99595 00024	1,0000000000	9	0,00000 00000 90000 00000
	8	— — 07999 99680 00017		8	— — — — 80000 00000
	7	— — 06999 99755 00011		7	— — — — 70000 00000
	6	— — 05999 99820 00007		6	— — — — 60000 00000
	5	— — 04999 99875 00004		5	— — — — 50000 00000
	4	— — 03999 99920 00002		4	— — — — 40000 00000
	3	— — 02999 99955 00001		3	— — — — 30000 00000
	2	— — 01999 99980 00000		2	— — — — 20000 00000
	1	— — 00999 99995 00000		1	— — — — 10000 00000

Fünfte Tabelle.

Zur Umkehrung der Reihen.

Es sey

$$ax^{\beta} + bx^{\beta+\delta} + cx^{\beta+2\delta} \,.. = y^{m}, \text{ so ist } x^{n} =$$

$$+ a^{\frac{-n}{\beta}} \,.\, x^{\frac{nm}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left[.\,a^{-\frac{(n+\delta+\beta)}{\beta}}.\,b\right]x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{m\delta}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left\{\begin{matrix} -a^{-\frac{(n+2\delta+\beta)}{\beta}}c \\ +\frac{(n+2\delta+\beta)}{\beta}.\,a^{-\frac{(n+2\delta+2\beta)}{\beta}}b^2 \end{matrix}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{2m\delta}{\beta}}$$

$$+\frac{n}{\beta}\left\{\begin{matrix} -a^{-\frac{(n+3\delta+\beta)}{\beta}}d \\ +\frac{(n+3\delta+\beta)}{\beta}.\,a^{-\frac{(n+3\delta+2\beta)}{\beta}}.\,2bc \\ -\frac{(n+3\delta+\beta).(n+3\delta+2\beta)}{.\,2\,.\,\beta^2}a^{-\frac{(n+3\delta+3\beta)}{\beta}}b^3 \end{matrix}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{3m\delta}{\beta}}$$

$$\frac{n}{\beta}\left\{\begin{matrix} -a^{-\frac{(n+4\delta+\beta}{\beta}}.\,e \\ +\frac{(n+4\delta+\beta)}{\beta}.\,a^{-\frac{(n+4\delta+2\beta)}{\beta}}.\begin{cases}2bd\\ c^2\end{cases} \\ -\frac{(n+4\delta+\beta)(n+4\delta+2\beta)}{1\,.\,2\,.\,\beta^2}.\,a^{-\frac{(n+4\delta+3\beta)}{\beta}}.\,3b^2c \\ +\frac{(n+4\delta+\beta)..(n+4\delta+3\beta)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\beta^3}a^{-\frac{(n+4\delta+4\beta)}{\beta}}.\,b^4 \end{matrix}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{4m\delta}{\beta}}$$

$$\frac{n}{\beta}\left\{\begin{matrix} -a^{-\frac{(n+5\delta+\beta)}{\beta}}.\,f \\ +\frac{(n+5\delta+\beta)}{\beta}a^{-\frac{(n+5\delta+2\beta)}{\beta}}\begin{cases}2be\\ 2cd\end{cases} \\ -\frac{(n+5\delta+\beta).(n+5\delta+2\beta)}{1\,.\,2\,.\,\beta^2}.\,a^{-\frac{(n+5\delta+3\beta)}{\beta}}.\begin{cases}3b^2d\\ 3bc^2\end{cases} \\ +\frac{(n+5\delta+\beta)..(n+5\delta+3\beta)}{1\,.\,2\,.\,3\beta^3}a^{-\frac{(n+5\delta+4\beta)}{\beta}}.\,4b^3c \\ -\frac{(n+5\delta+\beta)..(n+5\delta+4\beta)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\beta^4}a^{-\frac{(n+5\delta+5\beta)}{\beta}}.\,b^5 \end{matrix}\right\}x^{\frac{nm}{\beta}+\frac{5m\delta}{\beta}}$$

u. s. w.

Anhang II.

Rechnungsbeyspiele und Mechanismen.

Rechnungsbeyspiele und Mechanismen.

Zum zweyten Kapitel.

Zu S. 9.

Die Formen: 2134, 123, 321, 1432, 15, 1243, 134, 22, 32, 13, 35, 4, 243, werden sich, bey lexicographischer Ordnung, erst so gruppiren:

123, 1432, 15, 134, 13 | 2134, 2143, 22, 243 | 321, 32, 35 | 4
alsdann so

123, 134, 13, 1432, 15 | 2134, 2143, 22, 243 | 321, 32, 35 | 4
alsdann

123, 13, 134, 1432, 15 | 2134, 2243, 22, 243 | 32, 321, 35 | 4
und in der letzten Folge völlig geordnet seyn; arithmographisch hingegen kämen sie so nach einander zu stehn:

4 | 13, 25, 22, 32, 35 | 123, 134, 143, 321 | 1432, 2134, 2143. |
Das Umsetzen der ersten Anordnung in die zweyte ist sehr leicht. Man durchläuft lexicographisch geordnete Formen, bloß diejenigen successiv heraushebend, welche sich auf dieselbe Classe beziehen, ohne übrigens die Folge dieser Formen zu ändern, alsdann stellen sie sich von selbst arithmographisch. Aber nicht so leicht ist das umgekehrte Verfahren, arithmographisch geordnete Formen in lexicographisch auf einander folgende umzustellen; es kommt beynahe auf das ursprünglich ordnende Verfahren zurück.

Zu S. 10.

Durch coordinirendes Verfahren entwickeln sich z. B. aus den Elementen 1, 2, 3, 4 vollständig alle Permutationsformen in folgender Ordnung:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Auf gleiche Weise folgen auf einander die Formen: 145223, 145232, 145322, 152234, 152243, 152324, 152342, 152423, 152432, 153224, 153242, 153422, 154223, 154232, 154322, 212345, 212354, 212435, 212453, 212534, 212543 u. s. w.

Zu S. 11.

Um z. B. nach dieser Regel die Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 zu erhalten, setzt man erst 1; alsdann, indem 2 hinzukommt, 21, 12; darauf, insofern 3 hinzukommt, 321, 312; 231, 213; 132, 123; endlich, weil sich noch 4 dazugesellt, 4321, 4312, 4231, 4213, 4132, 4123; 3421, 3412, 3241, 3214, 3142, 3124; 2431, 2413, 2341, 2314, 2143, 2134; 1432, 1423, 1342, 1324, 1243, 1234. Man übersieht die Formen am leichtesten, wenn man sie alle vertical unter einander setzt, hat dabey auch die Bequemlichkeit, daß die höchste Ordnung der neuen Formen, die durch Hinzufügung eines folgenden Elements entstehen, durch bloßes Vorsetzen dieses neuen Elements vor die schon vorher gebildeten Formen erhalten werden kann.

Zu S. 12 u. 13.

So ist die Anzahl aller möglichen Permutationsformen aus den Elementen 1, 2, 3, 4 = 1 . 2 . 3 . 4 = 24. Sieben von einander verschiedene Elemente gestatten 1 . 2 . 3 . . . . 7 oder 5040, zehn verschiedene Elemente 3628800 Permutationen. Wären aber unter sieben Elementen drey einander gleiche vorhanden, wären z. B. die Elemente 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 oder 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5 zur Permutation gegeben, so beschränkte

sich die Zahl der aus ihnen möglichen Complexionen auf $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ d. i. 840. Befinden sich unter zehn Elementen vier einander gleiche der einen und zwey identische der anderen Art, so ist die Menge der verschiedenen Permutationsformen, welche sich aus ihnen bilden lassen, nur noch $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 75600$.

Zu §. 15.

Durch coordinirendes Verfahren erhält man z. E. $\overset{4}{C}(1, 1, 1, 2, 2, 3) = 1112, 1113, 1122, 1123, 1223$; eben so $\overset{4}{C}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5)$ = 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 345, 355, 444, 445, 455, 555; so ist C. (1, 2, 3, 4, 5) = 1234, 1235, 1245, 1345, 2345.

Zu §. 16.

Nach der subordinirenden Methode bildete sich z. E. $\overset{4}{C}(1, 1, 1, 2, 2, 3)$ allmälig so. Zuerst nähme man $\overset{1}{C} = 1, 2, 3$; daraus fände sich $\overset{2}{C} = 11, 12, 13, 22, 23$; daraus $\overset{3}{C} = 111, 112, 113, 122, 123, 223$; daraus endlich C = 1112, 1113, 1122, 1123, 1223. Die Fälle von unbedingt gestatteter, oder verbotener Wiederholung sind hier so leicht, daß es unnöthig wäre, von ihnen Beyspiele zu geben.

Zu §. 17.

Der Inbegriff aller möglichen Classen aus den Elementen, 1, 1, 2, 2, 3, 4 wäre folgender: 1, 11, 112, 1122, 11223, 112234, 11224, 1123, 11234, 1124, 113, 1134, 114, 12, 122, 1223, 12234, 1224, 123, 1234, 124, 13, 134, 14, 2, 22, 223, 2234, 224, 23, 234, 24, 3, 34, 4.

Man hätte ihn durch C (1, 1, 2, 2, 3, 4) andeuten können. Bey verbotener, oder durchaus für jedes Element beschränkter Wiederholung, erschöpft sich die Menge der aus ihnen möglichen Classen unfehlbar; bey unbedingter Wiederholbarkeit muß ihr eine willkührliche Grenze gesetzt werden.

Zu S. 18.

Auf die S. 17. angezeigte Art, Combinationsformen durch bedingtes Permutiren abzuleiten, erhielte man z. E. C (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) in der ersten Columne

1234	56789	1256	34789	1347	25689
1235	46789	1257	34689	1348	25679
1236	45789	1258	34679	1349	25678
1237	45689	1259	34678	1356	24789
1238	45679	1267	34589	1357	24689
1239	45678	1268	34579	1358	24679
1245	36789	1269	34578	1359	24678
1246	35789	1278	34569	1367	24589
1247	35689	1279	34568	1368	24579
1248	35679	1289	34567	1369	24578
1249	35678	1345	26789	1378	24569
		1346	25789	1379	24568
				1389	24597

u. s. w.

Die Zahl dieser Combinationen zu 4 aus 9 verschiedenen Elementen ist $\frac{9 \cdot 8 \ldots . 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \ldots 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$

Zu S. 20.

Aus den Reihen A, B, C, D werden durch das allmälig
a, b, c, d
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$
von niedrigern Formen zu höheren, nach successiv wachsenden Graden der Classen, aufsteigende Verfahren alle möglichen Variationsformen in dieser Ordnung hervorgehn. Zuerst $\overset{1}{V}$ = A, B, C, D; darauf $\overset{2}{V}$ = Aa, Ab, Ac, Ad, Ba, Bb, Bc, Bd, Ca, Cb, Cc, Cd, Da, Db, Dc, Dd; zuletzt

$\overset{3}{V}$ = Aaα, Aaβ, Aaγ, Aaδ, Abα, Abβ, Abγ, Abδ, Acα, Acβ, Acγ, Acδ, Adα u. s. f. indem jeder Form der vorigen Variationsclasse allmälig α, β, γ, δ nachgesetzt wird.

Wollte man die Elemente der folgenden Reihe den Formen, die sich aus den vorhergehenden schon gebildet haben, nicht nach, sondern vorsetzen, so müßte man zur Regel machen, daß die letzte Stelle der Form sich auf die erste der gegebenen Reihen beziehn sollte, und so fort; eine Unordnung, die ohne alle Noth eingeführt seyn würde.

Die Voraussetzung, daß nicht alle gegebenen Reihen gleich viele Elemente besitzen sollen, ändert in diesem Verfahren nichts. Sind z. E. die Reihen A, B, C vorhanden,
b, c, d
α, β, γ, δ
und sollen aus ihnen alle Variationsformen gebildet werden, so erhält man erst $\overset{1}{V}$ = A, B, C; alsdann $\overset{2}{V}$ = Ab, Ac, Ad, Bb, Bc, Bd, Cb, Cc, Cd; endlich $\overset{3}{V}$ = Abα, Abβ, Abγ, Abδ, Acα, Acβ, Acγ, Acδ, Adα, Adβ, Adγ, Adδ, Bbα, Bbβ, Bbγ, Bbδ, Bcα, Bcβ u. s. w.

Im letzteren Falle ist die Anzahl aller $\overset{3}{V} = 3 . 3 . 4 = 36$; im ersteren, wo jede von den drey vorhandenen Reihen vier Elemente enthält $= 4 . 4 . 4 = 4^3 = 64$.

Zu S. 21.

Bedient man sich eines gemeinschaftlichen Index für gleichhohe Glieder der gegebenen Reihen, um aus ihm alle Variationsformen einer vorgeschriebenen Classe auf die Art zu bilden, daß man aus jeder vorhergehenden Form die im Range nächsthöhern ableitet; so würden bey der Voraussetzung gleichvieler Elemente in jeder Reihe z. E. alle Variationsformen aus den Reihen

1	2	3	4
A,	B,	C,	D
a,	b,	c,	d
α,	β,	γ,	δ

welche man ab=

gekürzt durch $\overset{3}{V}$ (1, 2, 3, 4) bezeichnen könnte, in dieser Ordnung auf einander folgen:

111	131	211	231	311	331	411	431
112	132	212	232	312	332	412	432
113	133	213	233	313	333	413	433
114	134	214	234	314	334	414	434
121	141	221	241	321	341	421	441
122	142	222	242	322	342	422	442
123	143	223	243	323	343	423	443
124	144	224	244	324	344	424	444

Diese vollständige Entwickelung hat, wie auch vorhin schon angezeigt wurde, 64 verschiedene Variationsformen (zu drey aus vier Elementen) gegeben. Sie enthalten alle $\overset{3}{C}$ (1..2..3..4..) = 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444, jede dieser Formen, so oft es ihre Natur gestattet, permutirt.

Wären dagegen in den einzelnen Reihen nicht alle Glieder vollständig vorhanden, sollten z. E. aus den Reihen

	1	2	3	4
I.	A,	B,	C	
II.		b,	c,	d
III.	α,	β,	γ,	δ

alle Variationsformen gebildet werden, so daß man von den niedrigsten zu den successiv höheren fortschritte, so wäre folgendes Schema der Arbeit dazu nöthig, wenn 1, 2, 3, 4, die gleichhohen Glieder der Reihen andeuteten:

I. II. III.			
..4	133	231	323
343	134	232	324
232	141	233	331
121	142	234	332
121	143	241	333
122	144	242	334
123	221	243	341
124	222	244	342
131	223	321	343
132	224	322	344

Zu S. 24.

Bey unbegrenztem Fortschritt der Elemente und beliebiger Wiederholbarkeit jedes einzelnen sind z. E. folgende Formen die Combinationen zur Classe 4, zur Summe 12 gehörig, in Zeichen ${}^{12}\overset{4}{C}$ (1..2..3.. etc.) = 1119, 1128, 1137, 1146, 1155, 1227, 1236, 1245, 1335, 1344, 2226, 2235, 2244, 2334, 3333.

Wenn hingegen die Reihe gestatteter Elemente mit der Zahl 7 hätte abbrechen sollen, so wären bey übrigens gleichen Voraussetzungen von den vorstehenden Formen alle übrigen außer den beyden ersten entsprungen, so daß ihre Reihe mit der niedrigsten Form 1137 anhübe.

Zu S. 26.

Sollten bey einer unbedingt fortschreitenden Elementenreihe alle Variationsformen der vierten Classe zur Summe 9, in Zeichen ${}^{9}\overset{4}{V}$, gebildet werden, so würde die niedrigste Form 1116, und aus ihr bildeten sich auf dem Wege der Coordination allmälig die nächsthöheren: 1116, 1125, 1134, 1143, 1152, 1161, 1215, 1224, 1233, 1242, 1251, 1314, 1323, 1332, 1341, 1413, 1422, 1431, 1512, 1521, 1611, 2115, 2124, 2133, 2142, 2151, 2214, 2223, 2241, 2313, 2322, 2331, 2412, 2421, 2511, 3114, 3123, 3132, 3141, 3213, 3222, 3231, 3312, 3321, 3411, 4113, 4122, 4131, 4212, 4221, 4311, 5112, 5121, 5211, 6111.

Wäre hingegen das höchste vorhandene Element 4, so würde die erste Form nicht 1116 bleiben dürfen; setzte man 1114, so fehlten an der Summe noch zwey Einheiten, die folglich auf die nächste Stelle nach der letzten geworfen werden müssen. So ist also hier die niedrigste Form 1134, und es entstehn aus ihr folgende: 1134, 1143, 1224, 1233, 1242, 1314, 1323, 1332, 1341, 2134, 2133,

2142, 2214, 2223, 2232, 2241, 2313, 2322, 2331, 2412, 2421, 2511, 3114, 3123, 3132, 3141, 3213, 3222, 3231, 3312, 3321, 3411, 4113, 4122, 4131, 4212, 4221, 4311.

Das subordinirende Verfahren, Variationsformen einer bestimmten Classe von vorgeschriebener Summe zu entwickeln, wobey selbst 0 als Index und Element nicht ausgeschlossen bleiben soll, beginnt mit den Formen der niedrigsten, also ersten Classe:

${}^0\overset{1}{V}$,	${}^1\overset{1}{V}$,	${}^2\overset{1}{V}$,	${}^3\overset{1}{V}$,	${}^4\overset{1}{V}$,	${}^5\overset{1}{V}$,	u. s. w.
0	1	2	3	4	5	

Um aus ihnen und den Variationsformen aller folgenden Classen die der nächsthöheren von vorgeschriebener Summe vollständig abzuleiten, soll allen Formen der nächstniedrigeren Ordnung, welche noch keiner höheren Summe als die verlangte angehören, dasjenige Element beygefügt werden, welches den Betrag aller in ihnen enthaltenen Elemente zu der geforderten Summe ergänzt, wobey auch 0 als ergänzendes Element nicht übersehen werden darf. Daß übrigens jedes neu hinzukommende Element stets an die nemliche Stelle, entweder vor oder hinter die vorige Form, gesetzt werden muß, versteht sich von selbst. Aus den vorstehenden Formen bilden sich demgemäß zunächst die der zweyten Classe:

${}^0\overset{2}{V}$,	${}^1\overset{2}{V}$,	${}^2\overset{2}{V}$,	${}^3\overset{2}{V}$,	${}^4\overset{2}{V}$,	${}^5\overset{2}{V}$	u. s. w.
00	01	02	03	04	05	
	10	11	12	13	14	
		20	21	22	23	
			30	31	32	
				40	41	
					50	

Aus diesem die Formen der dritten Classe:

${}^0\overset{3}{V}$,	${}^1\overset{3}{V}$,	${}^2\overset{3}{V}$,	${}^3\overset{3}{V}$,	${}^4\overset{3}{V}$	u. s. w.
000	001	002	003	004	
	010	011	012	013	
	100	101	102	103	
		020	021	022	
		110	111	112	
		200	201	202	
			030	031	
			120	121	
			210	211	
			300	301	
				040	
				130	
				220	
				310	
				400	

Auf gleiche Weise würden sich hieraus die Variationsformen der vierten Classe, den Summen 0, 1, 2, 3, 4, u. s. w. angehörig ableiten lassen. Es ist z. E. ${}^3\overset{4}{V} = {}^0\overset{3}{V}3 + {}^1\overset{3}{V}2 + {}^2\overset{3}{V}1 + {}^3\overset{3}{V}0$, wenn durch Beysetzung der Zahlen 3, 2, 1, 0 neben die Variationszeichen angedeutet werden soll, daß diese Zahlen allen unter jenen begriffenen Variationsformen als Endelemente beyzugesellen sind. Also ${}^3\overset{4}{V}$ = 0003; 0012, 0102, 1002; 0021, 0111, 1011, 0201, 1101, 2001; 0030, 0120, 1020, 0210, 1110, 2010, 0300, 1200, 2100, 3000.

Für den Fall, wo die Reihe der gegebenen Elemente, aus welchen Variationsformen zu bestimmten Summen gebildet werden sollen, mit einem gewissen höchsten abbräche, schließt sich die Entwicklung jeder Classe dieser Formen von selbst mit derjenigen Gruppe, welche einer Summe angehört, die jenem höchsten unter den vorhandenen Elementen gleich kommt.

Zu S. 27.

Der daselbst angegebene Gang der Entwicklung aller möglichen Variationsformen zu bestimmten Summen aus dem

Index (1, 2, 3, 4, 5 ....) ohne Rücksicht auf die Classen, denen sie angehören, beginnt mit $^1V = 1$. Darauf folgt $^2V = 11; 2$. Hierauf $^3V = 111, 12; 21; 3$. Ebenso $^4V = 1111, 112, 121, 13; 211, 22; 31; 4$. Alle ^5V werden gefunden, indem man den ^4V das Element 1, den ^3V das Element 2, den ^2V das Element 3, u. s. w. überhaupt jeder von den Variationsformen aller niedrigeren Summen dasjenige Element vorsetzt, welches ihre Summe zu der geforderten, also zu 5 ergänzt, und als letzte Form dasjenige Element hinzutreten läßt, welches für sich schon jene Summe ausmacht. Es ist folglich:

$$^5V = 1\,^4V + 2\,^3V + 3\,^2V + 4\,^1V + 5 =$$

11111	2111	311	41	5
1112	212	32		
1121	221			
1131	23			
1211				
122				
131				
14				

Bemerkenswerth und durch Hülfe des speciellen Satzes aus der Lehre von den geometrischen Progressionen, daß: $1 + 2^1 + 2^2 \ldots - + 2^n = 2^{n+1} - 1$ sogleich zu beweisen ist es, daß die Anzahl aller möglichen Variationsformen einer bestimmten Summe, die sich aus dem Index (1, 2, 3, 4....) bilden lassen, durch eine Potenz der Zahl 2 berechnet wird, deren Grad um eine Einheit geringer ist, als die Summe, welcher die bezeichneten Formen angehören. So beläuft sich z. E. die Menge aller ^4V auf $2^3 = 8$; desgleichen aller ^5V auf $2^4 = 16$; allgemein ^nV begreift eine durch 2^{n-1} berechnete Anzahl von Formen unter sich.

Zum dritten Kapitel.

Zu S. 30.

Das für die Multiplication von zwey Factoren, welche beyde eine der Grundform der Analysis entsprechende Gestalt besitzen und auf gleiche Art geordnet sind, vorgezeichnete Ver-

fahren läßt sich sehr leicht auf einen bequemen Mechanismus zurückbringen, sofern es gewünscht werden könnte, das Zusammensuchen der Factoren für die Partialproducte, deren Summe ein Glied des Hauptproducts bildet, zu erleichtern. Man ändre nichts an dem einen Factor, aber man setze soviele von den successiven Gliedern des andern, als die Zahl derjenigen anzeigt, die man für das Product berechnen will, in umgekehrter Ordnung an den obern Rand eines beweglichen Blatts. Ist es eine geschlossene Anzahl von Gliedern, die der andre Factor besitzt, so kann man ihn im Ganzen umkehren und braucht nicht vorläufig zu fragen, wie viel Glieder für das Product verlangt werden. Um alsdann ein Glied des Productes von bestimmtem Range zu erhalten, hat man nur nöthig zu bewirken, daß irgend ein Glied des einen Factors unter oder über ein so hohes Glied des andern zu stehen komme, daß der Rang von beyden sich zu dem des geforderten Partialproductes ergänzt. Dadurch wird sich von selbst jedes Glied des einen Factors unter oder über ein solches Glied des anderen gestellt haben, mit welchem es zu multipliciren ist, um seinen Betrag zu dem geforderten Gliede des Productes zu liefern. Der Inbegriff aller einzelnen Producte aus je zwey auf die vorgeschriebene Weise unter einander gestellten Gliedern der Factoren ist der verlangte Theil des Gesammt-Productes. — Soll z. E. von dem Producte, welches aus der Multiplication der beyden Formen: $(1 + 4x - 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 - 7x^5)$ und $(9 - x - 3x^2 + 12x^3 + 10x^4)$ entspringt, das dritte Glied nach dem anfänglichen, also das in x^3 multiplicirte vollständig entwickelt werden; so sind zuvörderst die Glieder des einen Factors, z. B. des letzteren, in umgekehrter d. h. hier fallender Ordnung auf einen beweglichen Streifen zu setzen: $10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - x + 9$. Diesen lege man nun so unter die Glieder des ersten Factors, daß die Indices von irgend zwey Gliedern, welche unter einander zu stehen kommen, oder was damit einerley ist, die

Exponenten der in ihnen enthaltenen Potenzen der Hauptgröße sich zu der Summe 3 ergänzen. Auf diese Weise treten beyde Factoren so zusammen:

$$\begin{array}{r} 1 + 4x - 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 - 7x^5 \\ \underline{10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - x + 9 \qquad\qquad\qquad\quad} \end{array}$$

Jetzt bedarf es nur noch der Multiplication jedes in verticalem Sinne zusammengehörigen Gliederpaares, und der Vereinigung aller dadurch gewonnenen Partialproducte in eine Summe, um vollständig das gewünschte Glied des ganzen Productes zu erhalten, wobey die allen diesen Producten gemeinschaftliche Potenz von x abgesondert, und ihrem anderweitigen Inbegriff als Factor beygegeben werden kann. So entsteht: $(12 - 12 + 2 + 45)\,x^3 = 47\,x^3$, für den vorliegenden Fall der realisirte Werth der Formel $\overset{h}{{}_{0\,..\,3}}\Sigma\,(\overset{3-h}{a}\,.\,\overset{h}{b})\,x^3$.

Um das fünfte Glied (nach dem anfänglichen) des Products aus den beyden gegebenen Factoren, welches folglich in x^5 multiplicirt seyn wird, zu erhalten, müssen sich diese Factoren folgendermaßen unter einander stellen:

$$\begin{array}{r} 1 + 4x - 2x^2 + 5x^3 + 3x^4 - 7x^5 \\ \underline{10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - x + 9} \end{array} \quad \text{und es ist}$$

$$\overset{h}{{}_{0\ldots5}}\Sigma(\overset{5-h}{a}\,.\,\overset{h}{b})x^5 = (40-24-15-3-63)x^5 = -65x^5$$

Derjenige Theil dieses Gliedes, welcher, unter b die Coeffizienten der unteren Reihe verstanden, als den ihm zugehörigen Coeffizienten das Product $\overset{5-5}{a}\,.\,\overset{5}{b}$ oder $\overset{0}{a}\,\overset{5}{b}$ erhalten würde, fällt hier natürlich von selbst weg, weil die zweyte Reihe kein so hohes Glied besitzt, als verlangt wird, oder $\overset{5}{b}$ bey der Ausführung der Rechnung, wo es sich mit $\overset{0}{a}$ oder 1 verbinden sollte, $= 0$ zu setzen wäre. — Auch die Beach-

tung dieser Beschränkung wird bey der Anwendung des vorgezeichneten Mechanismus für die Multiplication zweyer Factoren überflüssig. Fehlte dagegen innerhalb der Grenzen vorhandener Glieder das eine oder andere von niedrigerem Range; so erfordert die ungestörte Anwendbarkeit jenes Mechanismus, daß dessen Stelle durch eine Null oder ein Sternchen ausgefüllt werde.

Geht der eine Factor mit seinen Gliedern ins Unendliche fort, während der andre eine bestimmte Zahl von Gliedern hat, so ist es der letztere, der mit umgekehrter Ordnung der Glieder an den ersteren angelegt wird.

Die Reihe: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ mit dem Factor $1 - x$ multiplicirt, giebt als Product 1. Jedes auf das Anfangsglied folgende Glied nemlich, allgemein das $(n+1)$te nach dem ersten, wird für sich $= 0$. Dieses berechnet sich nemlich aus: $1 + x + x^2 \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$

$$\frac{\qquad -x \quad +1}{\text{durch} \quad -x^{n+1} + x^{n+1} = 0}$$

Das Product der Reihe:

$1 - x + x^2 - x^3 \ldots - x^{2n-1} + x^{2n} - x^{2n+1}$ u. s. w.

in den Factor $(1 + x)$ ist ebenfalls $= 1$. Allgemein berechnet sich nemlich das 2nte Glied nach diesem ersten aus

$$-x^{2n-1} + x^{2n} - \text{ u. s. w.}$$
$$\frac{+x \qquad +1}{\text{durch} \quad -x^{2n} + x^{2n} = 0;}$$

desgleichen das $(2n+1)$te nach dem anfänglichen aus

$$-x^{2n-1} + x^{2n} - x^{2n+1} + \text{ u. s. w.}$$
$$\frac{+x \qquad +1}{\text{durch} \quad x^{2n+1} - x^{2n+1} = 0.}$$

Dagegen ist $(1+x).(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)$ $= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots$

$(1 - x).(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \ldots$

Laufen beyde Factoren mit ihren Gliedern ins Unendliche, so muß zuvörderst gefragt werden, wie viele Glieder des Products verlangt sind. Ebensoviele von den Gliedern des einen Factors muß man alsdann behalten, ihre Reihe mit Weglassung aller übrigen umkehren, und damit nach der Regel verfahren.

Zu S. 32.

Die Voraussetzung, beyde Factoren seyen nach der allgemeinsten Grundform der Analysis gebildete Reihen, so daß die Exponenten der in ihren Gliedern herrschenden Potenzen der Hauptgröße überhaupt nur irgend eine arithmetische Progression beobachteten, ändert in der vorhin aufgestellten Regel für die mechanische Entwicklung irgend eines bestimmten Gliedes des Products durchaus nichts ab. Sollte z. E. der Exponent der Hauptgröße im Anfangsgliede der ersten Reihe $\alpha = 2$, im Anfangsgliede der zweyten Reihe $\beta = 3$, der Unterschied aber, um welchen jeder Exponent der Hauptgröße im nächsthöheren Gliede den vorhergehenden übertrifft $\delta = 2$ gesetzt seyn, und würden bey dieser Annahme etwa die Formen:

$$(5x^2 + 8x^4 + 2x^6 - 7x^8 + x^{10} - 3x^{12})$$
$$(4x^3 - 9x^5 + * + 4x^9 - 2x^{11} + x^{13} + 15x^{15})$$

zur Multiplication gegeben; so wird, um irgend ein Glied des Productes zu erhalten, gefordert, daß die Glieder des einen Factors in umgekehrter Rangfolge so unter die des anderen gesetzt werden, daß die Summen der Indices von irgend zwey auf solche Art zusammengeordneten Glieder der Zahl des geforderten Gliedes aus dem Producte gleich komme. Hierdurch ist zugleich die Bedingung erfüllt, daß sich Paarweise alle die Glieder verschiedener Factoren zusammengestellt haben, welche die Hauptgröße in solchen Potenzen enthalten, daß sich deren Exponenten zu dem im voraus zu berechnenden Grade der Potenz ergänzen, in welcher die Hauptgröße in dem verlangten Gliede des Productes wieder erscheinen muß. Die

Producte aller dieser Gliederpaare, in eine Summe zusammengezogen, stellen den gewünschten Theil des ganzen Productes dar. Soll z. E. von dem Producte, welches aus den gegebenen Factoren zu bilden ist, das fünfte Glied nach dem anfänglichen entwickelt werden, welches folglich in $x^{(2+3+5.2)} = x^{15}$ (nach der Vorschrift $x^{(\alpha+\beta+r\delta)}$) multiplicirt seyn muß; so ist die Ordnung, in welcher sich diese unter einander schieben, folgende:

$$\overset{0}{5x^2} + \overset{1}{8x^4} + \overset{2}{2x^6} - \overset{3}{7x^8} + \overset{4}{x^{10}} - \overset{5}{3x^{12}}$$

$$\overset{6}{15x^{15}} + \overset{5}{x^{13}} - \overset{4}{2x^{11}} + \overset{3}{4x^9} + \overset{2}{*} - \overset{1}{9x^5} + \overset{0}{4x^3}$$

und $\overset{h}{{}_{0\ldots5}}\Sigma\overset{h\;5\text{-}h}{(a.b)}x^{15} = (5-16+8+*-9+12)x^{15} = -24x^{15}$

Das achte Glied des Products, in $x^{(2+3+8.2)} = x^{21}$ multiplicirt, entsteht so:

$$\overset{0}{5x^2} + \overset{1}{8x^4} + \overset{2}{2x^6} - \overset{3}{7x^8} + \overset{4}{x^{10}} - \overset{5}{3x^{12}}$$

$$\overset{6}{15x^{15}} + \overset{5}{x^{13}} - \overset{4}{2x^{11}} + \overset{3}{4x^9} + \overset{2}{*} - \overset{1}{9x^5} + \overset{0}{4x^3}$$

$$\overset{h}{{}_{0\ldots8}}\Sigma\overset{h\;8\text{-}h}{(a.b)}x^{21} = (30-7-2-12)x^{21} = +9x^{21}$$

Das niedrigste Glied des Productes aus den vorliegenden Factoren ist $= 5x^2 . 4x^3 = 20x^5$; das höchste $= (-3x^{12}).(15x^{15}) = -45x^{27}$

Die Buchstaben α, β und δ der allgemeinen Formel können auch entweder alle oder nur der eine oder andere durch beliebig gewählte Brüche vertreten werden; sobald man jedes Glied mit dem ihm gebührenden Index bezeichnet, wird in obiger Regel nichts geändert. Nur ein Beyspiel, wo $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $\delta = \frac{1}{2}$ angenommen werden mag. Die Factoren sollen seyn:

$$(\overset{0}{24x} + \overset{1}{15x}^{\frac{5}{3}} + \overset{2}{\tfrac{1}{2}x}^{\frac{7}{3}} + \overset{3}{12x}^{\frac{9}{3}} - \overset{4}{3x}^{\frac{11}{3}})$$

$$(\overset{0}{7x^2} + \overset{1}{4x}^{\frac{8}{3}} + \overset{2}{*} - \overset{3}{x}^{\frac{12}{3}} + \overset{4}{16x}^{\frac{14}{3}} + \overset{5}{\tfrac{1}{3}x}^{\frac{16}{3}})$$

Das Anfangsglied des Products ist $24x.7x^2 = 168x^3$; das letzte: $(-3x^{\frac{11}{3}})(\tfrac{1}{3}x^{\frac{16}{3}}) = -x^{\frac{27}{3}} = -x^9$; als viertes Glied nach dem anfänglichen, worin $x^{1+2+4.\frac{2}{3}} = x^{\frac{17}{3}}$ (Specialisirung von $x^{\alpha+\beta+r\delta}$) herrschen muß, wird gefunden:

$$\overset{0}{24x} + \overset{1}{15x}^{\frac{5}{3}} + \overset{2}{\tfrac{1}{2}x}^{\frac{7}{3}} + \overset{3}{12x}^{\frac{9}{3}} - \overset{4}{3x}^{\frac{11}{3}}$$

$$\underline{\overset{5}{\tfrac{1}{3}x}^{\frac{16}{3}} + \overset{4}{16x}^{\frac{14}{3}} - x^{\frac{12}{3}} + \overset{2}{*} + \overset{1}{4x}^{\frac{8}{3}} + \overset{0}{7x^2}}$$

$$\sum_{0\ldots4}^{h\quad h4\text{-}h}(a.b)x^{\frac{17}{3}} = (384 - 15x + * + 48 - 21)x^{\frac{17}{3}} = 396x^{\frac{17}{3}}$$

Die einzige geringe Unbequemlichkeit, welche der eben dargestellte Mechanismus haben könnte, besteht darin, daß er die einzelnen Partialproducte jedesmal in eine Horizontalreihe nebeneinanderstellt, welche durch Addition zu einem Hauptgliede des Resultats zusammengezogen werden müssen, und solcher, nicht bequem zu summirender Reihen, soviele unter einander zu setzen hat, als das gesuchte Product Glieder erhält. Es ist leicht, wenn man will, dieser nicht gewöhnlichen Stellung abzuhelfen. Man setze die Glieder des einen Factors in ihrer ursprünglichen Ordnung in einer Verticalcolumne untereinander, und stiften neben dieser so viele für den Anfang noch leere folgende Verticalcolumnen, als man Glieder des Products in ihrer Reihe erhalten will. Die Glieder des andern Factors setze man in umgekehrter Ordnung, also von unten aufsteigend, auf einen

beweglichen Streifen. Man mag diesen an die Columne des ersten Factors anlegen, wie man will, so kommen immer, sobald ein Glied des einem sich neben eines des andern stellt, alle die Glieder zusammen, welche, das eine aus diesem, das andre aus jenem genommen, Producte von gleichem Range erzeugen, die also in einer leeren Verticalcolumne unter einander gestellt, und durch Addition vereinigt, ein Glied des Hauptproducts hervorbringen müssen. Wenn man also anfangs den beweglichen Streifen so anlegt, daß sein unterstes Glied mit dem obersten des zuerst hergestellten Factors zusammen fällt, hernach denselben Schritt vor Schritt sich um eins weiter hinunter schieben läßt; jedesmal die einzelnen Glieder desselben mit denen des ersten Factors, an denen sie liegen, multiplicirt, diese Producte in die nächste offene Verticalcolumne setzt, und ihre Summe berechnet, so ergeben die auf solche Art entstandenen Summen die successiven Glieder des Totalproducts. Da allgemein das rte von diesen durch die rte Verschiebung des beweglichen Streifens erhalten wird, so kann man jedes derselben einzeln, ohne Rücksicht auf vorhergehende und folgende sogleich bekommen. Daß auch hier die, allen in einen Inbegriff gehörigen Partialproducten gemeinschaftliche, Potenz von x abgesondert, und nur einmal hingestellt wird, versteht sich von selbst. Will man die möglichste Abkürzung, so wird man überhaupt den Potenzen-Fortschritt für die Glieder des Products für sich reguliren, und braucht alsdann nur die Coeffizienten der Factoren dem Mechanismus zu unterwerfen.

Aus den Factoren:

$$4x^3 - 9x^5 + * + 4x^9 - 2x^{11} + x^{13} + 15x^{15}$$

$$5x^2 + 8x^4 + 2x^6 - 7x^8 + x^{10} - 3x^{12}$$

entspringt ein Product, anhebend mit x^5, fortschreitend durch Potenzen, deren Exponenten schrittweise um 2 größer werden. Die Coeffizienten desselben ergeben sich aus nachstehendem Schema, wobey die des letzten Factors, auf beweglichen Streifen

gedacht, nur in einer ihrer successiven Lagen, hier der 6ten nach der anfänglichen, dargestellt worden sind.

Coeff. des Mr.	Coeff. des Md.	Coeffizienten des Products.											
	+ 4	+20	+32	+ 8	-28	+ 4	-12						
- 3	- 9		-45	-72	-18	+63	- 9	27					
+ 1	+ •			*	*	*	*	*	*				
7	+ 4				+20	+32	+ 8	-28	+ 4	-12			
+ 2	- 2					-10	-16	- 4	+14	- 2	+ 6		
+ 8	+ 1						+ 5	+ 8	+ 2	- 7	+ 1	- 3	
+ 5	+ 15							+75	+120	+30	-105	+15	-45
		20	-13	-64	-26	89	-24	78	140	9	-98	12	-45

Es ist also $20x^5 - 13x^7 - 64x^9 - 26x^{11} + 89x^{13} - 24x^{15} + 78x^{17} + 140x^{19} + 9x^{21} - 98x^{23} + 12x^{23} - 45x^{27}$ das Product.

Der gewöhnliche Multiplications-Mechanismus, welcher alle Producte, die aus den Gliedern des Multiplicand entstehn, so fern diese mit einem des Multiplicators verbunden werden, in eine Horizontalreihe bringt, solcher Horizontalreihen so viele erhält, als der Multiplicator Glieder hat, und diese so unter einander stellt, daß Glieder, die gleiche Potenz der Hauptgröße enthalten, in eine Verticalreihe fallen, so daß nur die Summen aller dadurch entstandenen Verticalreihen berechnet zu werden brauchen, ist im Grunde wenig verschieden von dem obigen Verfahren, und, sofern das ganze Product berechnet werden soll, das bequemste unter allen.

In dieser Art bildet sich das Product der Formen $4x^3 - 7x^2 + 8x - 2$, und $2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ auf folgende Art:

$$\begin{array}{rl} 4x^3 - 7x^2 + 8x - 2 & \\ 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 & \\ \hline 4x^3 - 7x^2 + 8x - 2 & \text{mit } + 1 \text{ multiplic.} \\ -20x^4 + 35x^3 - 40x^2 + 10x & \text{mit } - 5x \text{ ——} \\ 12x^5 - 21x^4 + 24x^3 - 6x^2 & \text{mit } + 3x^2 \text{ ——} \\ 8x^6 - 14x^5 + 16x^4 - 4x^3 & \text{mit } 2x^3 \text{ ——} \\ \hline 8x^6 - 2x^5 - 25x^4 + 59x^3 - 53x^2 + 18x - 2 & \end{array}$$

Auf gleiche Art geben nach dem gewöhnlichen Multiplications-Mechanismus die Factoren:

$4x^3 - 9x^5 + * + 4x^9 - 2x^{11} + x^{13} + 15x^{15}$
$5x^2 + 8x^4 + 2x^6 - 7x^8 + x^{10} - 3x^{12}$

$20x^5 - 45$	$x^7 + *$	$x^9 + 20$	$x^{11} - 10$	$x^{13} + 5$	$x^{15} + 75$	x^{17}	x^{19}	x^{21}	x^{23}	x^{25}	x^{27}
+32	−72	*	+32	−16	+ 8	+120					
	+ 8	−18	*	+ 8	− 4	+ 2	+30				
		−28	+63	*	−28	+ 14	−7	−105			
			+ 4	− 9	*	+ 4	− 2	+ 1	+15		
				−12	+27	*	−12	+ 6	− 3	−45	

$20x^5 - 13x^7 - 64x^9 - 26x^{11} + 89x^{13} - 24x^{15} + 78x^{17} + 140x^{19} + 9x^{21}$
$- 98x^{23} + 12x^{25} - 45x^{27}$

Zum vierten Kapitel.

Zu S. 34.

So findet sich bey der Division von $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$ durch $4x^2 - 4x + 1$, der Quotient folgendermaßen:

$$
\begin{array}{l|l|l}
4x^2 - 4x + 1 & 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 & 4x^2 - 4x + 1 \\
 & \underline{16x^4 - 16x^3 + 4x^2} & \\
 & \quad - 16x^3 + 20x^2 - 8x + 1 & \\
 & \quad \underline{- 16x^3 + 16x^2 - 4x} & \\
 & \qquad\qquad 4x^2 - 4x + 1 & \\
 & \qquad\qquad \underline{4x^2 - 4x + 1} &
\end{array}
$$

Zu S. 36.

Der einfachste und bequemste Mechanismus für die allmäßige Ableitung der Coeffizienten eines Quotienten, der aus der Division von zwey nach den successiven ganzen Potenzen einer Hauptgröße aufsteigenden Formen entspringt, würde folgender seyn. Man schreibt die Coeffizienten des Dividends vom Anfangsgliede an in natürlicher Ordnung in einer Horizontalreihe neben einander, so daß jeder von ihnen als oberstes Glied einer Verticalcolumne erscheinen kann. Die Coeffizienten des Divisors, mit Ausschluß des anfänglichen, setzt *)

*) Es ist nicht nöthig, den Coeffizienten des Dividend, des Divisors, und denen des Quotienten so wie sie entstehn, ihre Indices beyzufügen, kann indessen Anfangs die Ordnung des Verfahrens erleichtern.

man mit entgegengesetzten Zeichen, von unten anfangend, übrigens in natürlicher Ordnung vertical über einander auf einen beweglichen Streifen. Zwischen diesem und den Verticalcolumnen, worin die Coeffizienten des Dividends den höchsten Platz einnehmen, bleibt eine Spalte für die allmälig hervorgehenden Coeffizienten des Quotienten offen. Vorausgesetzt nun, diese hätten sich bereits bis zu einem von bestimmter Höhe entwickelt, und in der Ordnung wie sie entstanden, in der ihnen zugehörigen Spalte unter einander gestellt; so muß, um den nächst höheren Coeffizienten des Quotienten zu finden, jener bewegliche Streifen so weit herunter geschoben werden, daß sein niedrigster Coeffizient $(\overset{1}{a})$ horizontal neben dem unterstem, zuletzt berechneten Coeffizienten des Quotienten zu stehen kommt. Ist dieses geschehen, so hat sich von selbst (natürlich die Abstände aller Elemente in den Verticalcolumnen von einander als völlig gleich angenommen) jeder Coeffizient des Divisors neben denjenigen des Quotienten gestellt, mit welchem er jetzt in ein Product zusammenzuziehn ist. Alle so gewonnenen Partialproducte von dem untersten bis zu dem obersten hinauf, setze man der Reihe nach in diejenige von den seitwärts befindlichen Verticalcolumnen, worin ein Coeffizient des Dividends von eben so hohem Index als der des zunächst verlangten Coeffizienten des Quotienten ist, bereits die oberste Stelle einnimt, und vereinige sie mit diesem zusammen in eine Summe, welche nur noch durch das Anfangsglied des Divisors dividirt zu werden braucht, um den geforderten nächsthöheren Coeffizienten des Quotienten zu geben. Nachdem dieser an die ihm gebührende Stelle unter die vorigen gesetzt ist, wiederholt sich das nemliche Verfahren ganz auf dieselbe Weise. Den Anfang macht natürlich die Division des ersten Gliedes vom Dividend durch das niedrigste Glied des Divisors. Der daraus entspringende Quotient ist Anfangsglied des gesuchten Quotienten.

Soll z. E. der Quotient aus

$$\frac{6+4x+8x^2+9x^3-15x^4+8x^5+9x^6+10x^7+4x^8}{3-2x+8x^2+*+9x^4-x^6}$$

gefunden werden, so gilt folgendes Schema der Arbeit, worin sogleich $\frac{6}{3}=2$ als niedrigstes Glied des Quotienten eingeschrieben werden mag, für den Anfang:

Coeff. des Divisors, den anfänglichen ausgeschlossen, mit umgekehrten Zeichen.	Coeff. d. Quot.	Coeffizienten des Dividends:						
		+ 6	+ 4	+ 3	+ 9	—15	+ 8	
+ 1	+ 2		+ 4					
— 9	$+\frac{8}{3}$		+ 8					
*								
— 8								
+ 2								

Für die Entwicklung des Coeffizienten vom fünften Gliede des Quotienten wird sich dieses Schema so ausgebildet haben:

Coeff. des Divisors, u. s. w.	Coeff. des Quotienten.	Coeffizienten des Dividends:					
		+ 6	+ 4	+ 3	+ 9	— 15	+ 8
+ 1	+ 2		+ 4	— 16	*	— 18	+ 2
— 9	$+\frac{8}{3}$		+ 8	$+\frac{16}{3}$	$-\frac{64}{3}$	*	— 24
*	$-\frac{23}{9}$			$-\frac{23}{3}$	$-\frac{46}{9}$	$+\frac{184}{9}$	*
— 8	$-\frac{157}{27}$				$-\frac{157}{9}$	$-\frac{314}{27}$	$+\frac{1256}{27}$
+ 2	$-\frac{653}{81}$					$-\frac{653}{27}$	$-\frac{1306}{81}$
	$+\frac{1328}{243}$						$+\frac{1328}{81}$

Hiernach ist der Quotient bis zum fünften Gliede nach dem anfänglichen entwickelt $= 2 + \frac{8}{3}x - \frac{23}{9}x^2 - \frac{157}{27}x^3 - \frac{653}{81}x^4 + \frac{1328}{243}x^5 + \ldots..$

Offenbar ist, wofern man bloß den Quotienten verlangt, dieses Verfahren kürzer, als das des gewöhnlichen Divisions-Mechanismus. Indessen würde auch dieser, unter gleicher Voraussetzung einer wesentlichen Abkürzung fähig seyn. Wird der Quotient bloß bis zu dem Gliede des nten Ranges gefordert, so kann man alle Glieder im Dividend, Divisor und dem jedesmal bleibenden Reste, welche über diesen Rang hinausgehn, aus der Rechnung gänzlich weglassen, wodurch sie sich unfehlbar zusammenzieht. Den obigen Quotienten bis zum 5ten Gliede nach dem anfänglichen zu berechnen, würde in dieser Art Folgendes nöthig seyn.

Divisor

$$3 - 2x + 8x^3 + * + 9x^4 - x^5$$

Dividend

$$6 + 4x + 3x^4 + 9x^3 - 15x^4 + 8x^5 ..$$
$$6 - 4x + 16x^2 + * + 18x^4 - 2x^5$$
$$8x - 13x^2 + 9x^3 - 33x^4 + 10x^5$$
$$8x - \frac{16}{3}x^2 + \frac{64}{3}x^3 + * + 24x^5 ..$$
$$-\frac{23}{3}x^2 - \frac{37}{3}x^3 - 33x^4 - 14x^4 ..$$
$$-\frac{23}{3}x^2 + \frac{46}{9}x^3 - \frac{184}{9}x^4 + * \ldots$$
$$-\frac{157}{9}x^3 - \frac{113}{9}x^4 - 14x^5 ..$$
$$-\frac{157}{9}x^3 + \frac{314}{27}x^4 - \frac{1256}{27}x^5$$
$$-\frac{653}{27}x^4 + \frac{878}{27}x^5 ..$$
$$-\frac{653}{27}x^4 + \frac{1306}{81}x^5 \ldots$$
$$+\frac{1328}{81}x^5 \ldots$$

Quotient

$$2 + \frac{8}{3}x - \frac{23}{9}x^2 - \frac{157}{27}x^3 - \frac{653}{81}x^4 + \frac{1328}{243}x^5$$

Zu S. 41.

Sollte z. E. von dem Quotienten aus $\frac{1}{1-2x-5x^2-3x^3-4x^4}$ das 4te Glied berechnet werden, so hätte man, vorausgesetzt, daß die Elemente 1, 2, 3, 4 bedeuteten 2, 5, 3, 4 p^4Cx^4 zu berechnen.

Nun giebt p^4C folgende Formen

	realisirt
4	4
2) 13	12
22	25
3) 112	60
1111	16
	117

Es wäre also das verlangte 4te Glied $117x^4$

Zu S. 42.

Sollte von dem Quotienten $\frac{3+2x+4x^2+6x^3+5x^4}{1-4x-3x^2-7x^3-2x^4}$ das vierte Glied nach dem anfänglichen berechnet werden, so wäre es der Formel gemäß

$$x^4(p^4C.3+p^3C.2+p^2C.4+p^1C.6+5)$$

1 2 3 4

das Zeichen C auf die Elemente 4, 3, 7, 2, bezogen. Nun ist

	realisirt	multipl. mit	+5
p^1C = 1	4	6	24
p^2C = 2	3		
11	16		
	19	4	76
p^3C = 3	7		
2) 12	24		
111	64		
	95	2	190
p^4C 4	2		
2) 13	56		
22	9		
3) 112	144		
1111	256		
	467	3	1401
			1696

Also das vierte Glied des Quotienten = 1696 x

Allerdings würde bey der Berechnung eines einzelnen Gliedes für den gesuchten Quotienten auch ein halb recurrirendes, halb independentes Verfahren möglich seyn. Man fände $\frac{1}{1+\overset{1}{a}x^1+\overset{2}{a}x^2\ldots} = 1+\overset{1}{A}x^1+\overset{2}{A}x^2\ldots$ recurrirend nach der oben entwickelten Vorschrift, und alsdann für das Product aus dieser Form und $b+\overset{1}{b}x^1+\overset{2}{b}x^2\ldots$ das verlangte Glied durch ursprüngliche Multiplication beyder Formen. Indessen dürfte es zweckmäßiger seyn, das reine und vollständige recurrirende Verfahren anzuwenden.

Zu S. 43. 44.

Obschon bey Divisionen, die zu den Zwecken bestimmter Rechnungen geschehn, selten von den etwaigen Resten, welche zuletzt dabey zurückbleiben, die Rede seyn dürfte, so verdient doch, der Vollständigkeit wegen, auch ihre Ableitung auf einen bequemen Mechanismus zurück gebracht zu werden.

Und in dieser Beziehung ist es sehr angenehm, daß derselbe Mechanismus, aus welchem die successiven Glieder des Quotienten hervortreten, mit einer geringen Modification, von dem Puncte an, wo man die Entwicklung des Quotienten geschlossen hat, weiter fort geführt, sofort die successiven Glieder des zugehörigen Restes in natürlicher Ordnung hervorrufen kann, obschon er, wenn der Quotient auf irgend eine Art bereits anderweitig gefunden seyn sollte, aus diesem, dem Divisor und Dividend, ohne Wiederholung der Division sogleich die Glieder des Restes hervorbringt. Der Rest wird bloß dadurch erhalten, daß man alle Glieder des Products aus dem Quotienten und Divisor, die über das höchste Glied des Quotienten dem Range nach hinausgehn, berechnet, und von den gleichhohen des Dividendes abzieht. Nun hat die vollendete Division die Coeffizienten der successiven Glieder

des Quotienten in einer Hauptcolumne gegeben; die des Divisors, in umgekehrter Ordnung, und mit umgekehrten Zeichen, enthält der bey der Berechnung gebrauchte bewegliche Streifen. Es wird also nur eines successiven Anlegens und Verschiebens desselben an jener Hauptcolumne bedürfen, um die Factoren zusammenzustellen, deren Producte, durch Addition, mit dem gleichhohen Gliede des Dividend verbunden, eines von dem nemlichen Range für den Quotienten geben müssen, zu erhalten. Und da jeder Coeffizient des Dividend an die Spitze einer besondern Verticalcolumne gestellt wird, so können alle die Producte, welche mit ihm durch Addition verknüpft werden sollen, in der nemlichen Columne unter ihn gestellt werden, damit die Summe möglichst bequem erhalten werde. Wenn also bey der ersten Anlage der Rechnung die Coeffizienten des Dividend, und zwar, wofern sie soweit reichen, deren so viele als man Glieder des Quotienten und des letzten Restes, die Mengen beyder zusammengezählt, erhalten will, vorläufig in eine Horizontalreihe gestellt sind, auch in die erste Hauptcolumne das ursprünglich zu bestimmende A eingetragen ist, so geht fortlaufend der bewegliche Streifen, zum ersten Male mit seinem niedrigsten Gliede an A angelegt, schrittweise immer um eine Stelle tiefer herab, so daß jedesmal die Producte aus seinen Gliedern in die der Hauptcolumne, denen sie anliegen, berechnet, in die nächstfolgende Verticalcolumne gesetzt, und zur Summe gebracht werden. Solange man beabsichtigt, Glieder des Quotienten zu bilden, muß jede der so entstehenden Summen durch den Anfangs-Coeffizienten des Divisors getheilt, und das Resultat als neues Glied der Haupt-Columne eingeschrieben werden. Dies Theilen und Einschreiben hört auf, sobald man den Quotienten für geschlossen annimmt; von da an werden die Summen der ferner nach der Regel entstehenden Verticalcolumnen bloß unter dieselben gesetzt, und bieten in ihrer Ordnung die

nahme $dQ + R = D$, darin auf beyden Seiten durch a dividirt, $\frac{d}{a} \cdot Q + \frac{R}{a} = \frac{D}{a}$, nothwendig folgt.

Wie leicht es seyn würde, durch einzelnes Anlegen des beweglichen Streifens, für den letzten Rest der Division, ohne daß dabey irgend eines der vorhergehenden oder nachfolgenden dargestellt zu werden brauchte, ein einzelnes ihm angehöriges Glied zu berechnen, ergibt sich aus dem Mechanismus von selbst.

Zum fünften Kapitel.

Zu S. 64.

Sollte man das Product der Factoren: $(1 + x)$ $(3 + x)$ $(5 + x)$ $(6 + x)$ $(10 + x)$ berechnen, und würde bloß für ein einzelnes Glied desselben, z. E. das zweyte nach dem anfänglichen, der Ausdruck verlangt, so müßte man, aus den Größen 1, 3, 5, 6, 10, im angegebenen Sinne, $\overset{3}{C}$ berechnen, um es als Coeffizienten neben x^2 zu setzen. Alsdann müßte man für die Größen 1, 3, 5, 6, 10, den Inder 1, 2, 3, 4, 5, einführen, um aus diesem zuerst $\overset{3}{C}$ zu bilden, welches die Formen 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 begreift. Hierauf setzte man für die Elemente des Inder ihre Werthe, und berechnete die einzelnen, durch die Formen angedeuteten Producte aus ihnen, 15, 18, 30, 50, 60, 90, 150, 180, 300; die Summe aller dieser Producte, 923, wäre der gesuchte Coeffizient, und $923x^2$ würde das verlangte dritte Glied des Products seyn. Wollte man aber alle Glieder des Products vollständig erhalten, so würde dieses am leichtesten durch Anwendung der bekannten Regel geschehn, daß man für eine neue Classe alle Formen, die ein gewisses Element an der Spitze führen, erhält, wenn man alle der vorhergehenden Classe, die ein höheres Element als dieses an ihrer Spitze tragen, zusammenfaßt, um ihnen

(d. h. also hier ihrem Inbegriff) jenes genannte Element (hier als Factor) beyzugeben. Wofern also nur die Bildung der Formen so betrieben wird, daß man bey jeder Classe die Formen-Inbegriffe, welche durch das Vorsetzen verschiedener Elemente entstanden sind, sondert, und nach der Ordnung dieser Anfangselemente auf einander folgen läßt, so ergibt sich der Gang der Arbeit von selbst. Alle zusammengefaßt, die höher als mit 1 beginnen, hat man die, welchen 1 vorgesetzt werden kann; alle in einen Inbegriff vereinigt, die mit einem höheren Element anheben, als 2, erhält man die, denen 2 als Anfangselement beygegeben werden kann, u. s. w. Daher die Regel: Man setze anfangs die gegebenen Elemente einzeln nebeneinander, und summire sie vom Ende rückwärts, so daß unter jedes die Summe gesetzt wird, die bey seiner Addition zu allen folgenden herauskommt. Die allererste dieser Summen lasse man weg; unter die folgenden setze man die Elemente in natürlicher Ordnung, und multiplicire jede mit dem unter ihr stehenden Elemente. Diese Producte behandle man wieder, wie anfangs die einzelnen Elemente, man setze unter jedes von ihnen das, was herauskommt, wenn man es mit allen nachfolgenden zusammenaddirt. Die allererste dieser Summen wird, wie vorhin, weggelassen; unter die folgenden setzt man aufs Neue die einzelnen Elemente, und in dieser Ordnung schreitet das Verfahren fort, so lange es möglich ist. Die dabey allmälig weggelassenen ersten Summen sind eigentlich die Zahlen, welche berechnet werden sollten; sie enthalten die geforderten Summen der successiven Combinationsclassen aus den gegebenen Dingen, und zwar in der Ordnung, in welcher sie selbst hervorgehn. Dem zufolge nähme die Rechnung folgendes Schema an:

	1, 3, 5, 6, 10
Summen vom Ende	25) 24, 21, 16, 10
Die Elemente	1, 3, 5, 6
Producte	24, 63, 80, 60
Summen vom Ende	227) 203, 140, 60
Die Elemente	1, 3, 5
Producte	203, 420, 300
Summen vom Ende	923) 720, 300
Die Elemente	1, 3
Producte	720, 900
Summen vom Ende	1620) 900
Die Elemente	1
Product	900)

Und damit hätte man, in den allmälig abgesonderten ersten Summen der successiven Operationen, die Coeffizienten des gesuchten Products, welches auf die Weise: $900 + 1620x + 923x^2 + 227x^3 + 25x^4 + x^5$ seyn würde. Die Rechnung kommt indessen nicht häufig vor.

Zum sechsten Kapitel.

Zu S. 70. 71.

Sollte von den Factoren

$x - 3x^2 + 5x^4 - 2x^6$

$2x + 4x^3 - 6x^5$

$3x - 8x^4 + 2x^5 + 3x^6$

das Product berechnet, und zu dem Gliede, welches x^{10} enthalten würde, der Coeffizient gesucht werden, so wäre die combinatorische Andeutung desselben, $^{10}\overset{3}{V}\,x^{10}$. Um alle Variationsformen zur Summe 10 aus den gegebenen Coeffizienten als Elementen zu erhalten, bezeichnete man die des ersten Factors $1, -3, 5, -2$; die des zweyten $2, 4, -6$;
mit $1, \quad 2, 4, \quad 6$ mit $1, 3, 5$

die des dritten $3, -8, 2, 3$, und bekäme alsdann
mit $1, \quad 4, 5, 6$

für die independente Ableitung der geforderten Variationsformen zur Summe 10 folgendes Schema:

6		6
4	5	5
2	3	4
1	1	1

			realisirt		
1	3	6	1 . 4 . 3	=	+ 12
1	5	4	1 . (— 6) . (— 8)	=	48
2	3	5	(— 3) . 4 . 2	=	— 24
4	1	5	5 . 2 . 2	=	20
4	5	1	5 (— 6) 3	=	— 90
6	3	1	(— 2) . 4 . 3	=	— 24

Summe + 80 — 138 = — 68

Mithin das verlangte Glied des Products $= - 68 x^{10}$

Zum siebenten Kapitel.

Zu S. 75.

Würde z. E. von der Potenz

$|2x + 4x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 4x^5|^6$

das 7te Glied nach dem anfänglichen verlangt, so wäre es $p^{6+7} \overset{6}{C} x^{6+7}$, und es käme darauf an, $^{13}\overset{6}{C}$ aus den, durch die Zeichen 1, 2, 3, 4, 5 angedeuteten Elementen 2, 4, — 3, 5, — 4, zu bilden. Nun ist $^{13}\overset{6}{C}$ aus diesen beschränkten Elementen; mit beygefügten Versetzungszahlen

realisirt			
30) 111145 —	30) $2^4 . 5 . (-4)$	=	— 9600
120) 111235 —	120) $2^3 . 4 . (-3) . (-4)$	=	+ 46080
60) 111244 —	60) $2^3 . 4 . 5^2$	=	48000
60) 111334 —	60) $2^3 (-3)^2 . 5$	=	21600
60) 112225 —	60) $2^2 . 4^3 . (-4)$	=	— 61440
180) 112234 —	180) $2^2 . 4^2 . (-3) . 5$	=	— 172800
60) 112333 —	60) $2^2 . 4 . (-3)^3$	=	— 25920

Summe + 115680 - 269760 = - 154080

Es ist also das gesuchte 7te Glied nach dem anfänglichen $- 154080 x^{13}$

Zum achten Kapitel.

Zu S. 107.

Rechnungen, bey denen Formen, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, bald eine geschlossene, bald eine ins Unendliche fortgehende Zahl von Gliedern besitzen, auf Potenzen beliebiger Exponenten erhoben werden müssen, sind in der That sehr häufig, und es ist zweckmäßig, sich in ihnen Geläufigkeit zu erwerben.

a) Soll die Potenziirung auf dem Wege independenter Bestimmung geschehn, so wird sie für jedes einzelne Glied des Gesuchten besonders vorgenommen werden müssen, und man wird, in dem independenten Ausdrucke für das rte Glied des Resultats statt r die Zahl des verlangten einzelnen Gliedes zu setzen, und was derselbe alsdann vorschreibt, zu vollführen haben.

Sollte z. E. von $(4+2x+5x^2-3x^3+6x^4..)^{\frac{1}{2}}$ das 4te Glied nach dem anfänglichen berechnet werden, so hätte man, vorausgesetzt, daß die Elemente $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}$, und a bedeuten $2, 5, -3, 6$. 4

$${}^{1..4}\Sigma({}^{\frac{1}{2}}\overset{h}{\mathfrak{B}}\, a^{\frac{1}{2}\cdot h}\, p^4 \overset{h}{C})x^4$$ zu berechnen

Im Einzelnen also

$$\tfrac{1}{2}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{-\frac{1}{2}}.p^4\overset{1}{C} + \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{B}}.a^{-\frac{3}{2}}.p^4\overset{2}{C} + \tfrac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{-\frac{5}{2}}.p^4\overset{3}{C} + \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{-\frac{7}{2}}.p^4\overset{4}{C}$$

Nun ist ${}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}$	${}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{\mathfrak{B}} = -\frac{1}{8}$	${}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}} = +\frac{1}{16}$	${}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{\mathfrak{B}} = -\frac{5}{128}$
$4^{\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1}{2}$	$4^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \frac{1}{8}$	$4^{\frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{1}{32}$	$4^{\frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{1}{128}$
${}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} a^{n\cdot 1} = \frac{1}{4}$	${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} a^{n\cdot 2} = -\frac{1}{64}$	${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} a^{n\cdot 3} = \frac{1}{512}$	${}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} a^{n\cdot 4} = -\frac{5}{16384}$

Man berechne also ferner

$p\,{}^4\overset{1}{C} = 4$ realisirt $= +6$

multipl. mit ${}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1} = \frac{1}{4}$

$\frac{6}{4} = +\frac{6}{4}$

$p\,{}^4\overset{2}{C} = 2)\,13 = -12$

$22 \quad +25$

$+13$

multipl. mit ${}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2} = -\frac{1}{64}$

$-\frac{13}{64} = \qquad -\frac{13}{64}$

$p\,{}^4\overset{3}{C} = 3)\,112 = 60$

multipl. mit ${}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3} = \frac{1}{512}$

$+\frac{60}{512} = +\frac{60}{512}$

$p\,{}^4\overset{4}{C} = 1111 = 16$

multipl. mit ${}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4} = -\frac{5}{16384}$

$-\frac{5}{1024} = \qquad -\frac{5}{1024}$

Summe $\frac{828}{512} - \frac{213}{1024} = \frac{1443}{1024}$

Mithin das gesuchte Glied $\frac{1443}{1024}x^4$.

b) Will man hingegen solche Potenzirungen auf dem Wege der recurrirenden Bestimmung vollführen, so wird man, nachdem $\overset{0}{A} = a^n$ ursprünglich gefunden, der allgemeinen Recursionsformel so viele Specialisirungen geben müssen, als man Glieder berechnen will; man wird also für $\overset{1}{A} = \frac{n\overset{1}{a}\overset{0}{A}}{a}$

$$\overset{2}{A} = \frac{(n-1)\overset{1}{a}\overset{1}{A} + 2n\overset{2}{a}\overset{0}{A}}{2a}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{(n-2)\overset{1}{a}\overset{2}{A} + (2n-1)\overset{2}{a}\overset{1}{A} + 2n\overset{3}{a}\overset{0}{A}}{3a}$$

u. s. w. allmälig zu bilden und zu realisiren haben.

Auch dabey ist ein abkürzender Mechanismus möglich, bey welchem es erleichtert, wenn der Zähler der allgemeinen Recursionsformel in umgekehrter Ordnung genommen, also

$$\overset{r}{A} = \frac{rn.\overset{r}{a}.\overset{0}{A} + ((r-1)n-1)\overset{r-1}{a}.\overset{1}{A}.. + ((r-k)n-k)\overset{r-k}{a}\overset{k}{A}.. + (n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A}}{ra}$$

als Fundamentalregel gesetzt wird.

Man bilde, für r allmälig die successiven ganzen Zahlen setzend, aber dabey die A weglassend, aus dieser allgemeinen Recursionsformel so viele specielle, als man Coefficienten berechnen will, wobey ihre successiven Glieder jedesmal untereinander gesetzt werden *).

$$\left|\begin{array}{r} n\overset{1}{a} \\ \hline :a \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{r} 2n\overset{2}{a} \\ (n-1)\overset{1}{a} \\ \hline S. \\ :2a \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{r} 3n\overset{3}{a} \\ (2n-1)\overset{2}{a} \\ (n-2)\overset{1}{a} \\ \hline S. \\ :3a \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{r} 4n\overset{4}{a} \\ (3n-1)\overset{3}{a} \\ (2n-2)\overset{2}{a} \\ (n-3)\overset{1}{a} \\ \hline S. \\ :4a \end{array}\right| \text{ u. s. w.}$$

Man combinire ferner eine Hauptcolumne, in welche $A, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, ..$ so wie sie sich allmälig ergeben, in die Tiefe untereinander gestellt werden, so mit den ebengenannten Verticalcolumnen, daß sie sich allmälig an jede derselben, mit zusammenfallenden oberen Enden anlegt, betrachte die so paarweise zusammengelegten Zahlen als Factoren, stelle die aus ihnen berechneten Producte neben sie in den

*) Daß auch dabey im Zusammenhange Abkürzung möglich ist, liegt vor Augen. Aus den Anfangsgliedern der Verticalcolumnen, $n\overset{1}{a}, 2n\overset{2}{a}, 3n\overset{3}{a}, ...$ entstehn alle übrigen, wenn man von jedem derselben das a, welches darin liegt, wiederholt abzieht, und die Reste successiv in die nächstfolgenden Columnen, schrittweise jedesmal eine Stelle tiefer hinabgehend, aufstellt.

zu dieser Absicht frey gelassenen Raum, und verfahre damit nach Vorschrift des Schemas, so wird man jedesmal ein neues A erhalten *).

Sollten z. B. für $(4+2x+5x^2-3x^3+6x^4\ldots)^{\frac{1}{2}}$ die fünf ersten Glieder berechnet werden, so wäre das vorbereitende Schema folgendes:

Die	a	$\overset{1}{a}$	$\overset{2}{a}$	$\overset{3}{a}$	$\overset{4}{a}\ldots$
sind hier	4	2	5	−3	6.
also		$n\overset{1}{a}$,	$2n\overset{2}{a}$,	$3n\overset{3}{a}$,	$4n\overset{4}{a}$
werden		1,	5,	$-\frac{9}{2}$,	12,

Daraus die Columnen:

$\overset{1}{A}$	1		5		$-\frac{9}{2}$		12	
$\overset{2}{A}$	:4		−1		0		$-\frac{3}{2}$	
$\overset{3}{A}$			Summe :8		−3		−5	u. s. w.
$\overset{4}{A}$					Summe :12		−5	
							Summe :16	

Füllt sich durch wirkliche Rechnung das Schema aus, so ergibt sich, da $A = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

---

*) In der Ausführung wird ein beweglicher Streifen, auf welchen allmälig niederwärts, und so wie sie sich nach und nach entwickeln unter einander, die $\overset{0}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots$ geschrieben werden, Bequemlichkeit. Doch geht es sehr wohl an, die $\overset{0}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots$ in eine Columne ganz voran zu stellen, und das Anlegen derselben an die folgenden nur in Gedanken zu vollziehen.

2	1	2	5	10	$-\frac{9}{2}$	-9	12	24
$\frac{1}{2}$	:4	2	-1	$-\frac{1}{2}$	0		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$\frac{19}{16}$		$\left.\frac{1}{2}\right)$	Summe :8	$\frac{19}{2}$	-3	$-\frac{57}{16}$	-5	$-\frac{95}{16}$
$-\frac{67}{64}$				$\left.\frac{19}{16}\right)$	Summe :12	$-\frac{201}{16}$	-5	$+\frac{335}{64}$
$\frac{1443}{1024}$						$\left.\frac{67}{64}\right)$	Summe :16	$\frac{1443}{64}$
								$\left.\frac{1443}{1024}\right)$

Es ist also das Resultat:

$$2 + \tfrac{1}{2}x + \frac{19}{16}x^{2} - \frac{67}{64}x^{3} + \frac{1443}{1024}x^{4} \ldots .$$

Man könnte allerdings, wenn man die Recursionsformel in zwey Hauptheile, den einen alle ihre positiven, den andern alle ihre negativen Theile enthaltend, zerlegte:

$$A^{r} = \frac{n(a^{r}A^{0}\ldots + (r-k)a^{r-k}A^{k}\ldots + a^{1}A^{r-1}) - (a^{r-1}A^{1}\ldots + a^{r-k}kA^{k}\ldots + a^{1}(r-1)A^{r-1})}{ra}$$

nach einen andern Mechanismus begründen, wobey es auf zwey Columnen, aus den a gebildet, und zwey andre mit ihnen zu verbindende, die aus den A ihre Glieder erhalten müßten, ankommen würde. Dieser erforderte allerdings weniger Vorbereitung als der obige, aber er würde in der Ausführung beschwerlicher seyn.

Zu S. 125.

Die Regel der independenten Berechnung von Exponenzialgrößen im natürlichen System, deren Exponenten Formen sind, welche nach Potenzen von x beliebig fortschreiten, bedarf keiner weiteren Erläuterung; man muß ihr im einzelnen Falle genau nachfolgen, und ein erleichternder Mechanismus läßt sich dabey schwerlich anbringen.

Wollte man für:

$(2x + 4x^2 + 5x^3 + 3x^4 + 6x^5 - 8x^6 \ldots)$

z. E. das sechste Glied nach dem anfänglichen, so würde, die allgemeine Vorschrift entwickelt und specialisirt, indem man in dem Ausdruck: $1 \ldots r\Sigma\left(\frac{p^r\overset{h}{C}}{1..h}\right)$, statt $r = 6$ substituirte,

$$\frac{p^6\overset{1}{C}}{1} + \frac{p^6\overset{2}{C}}{1..2} + \frac{p^6\overset{3}{C}}{1.2.3} + \frac{p^6\overset{4}{C}}{1..4} + \frac{p^6\overset{5}{C}}{1..5} + \frac{p^6\overset{6}{C}}{1..6}$$

gefordert, die Coeffizienten der Form des gegebenen Exponenten, als wiederholbare Elemente angesehn, aus denen Combinationen zu bestimmten Summen gebildet werden sollen.

Nun ist

	angedeutet;	realisirt;	mult. mit;	gibt
$p^6\overset{1}{C} =$	6	$= -8$	1	$-\frac{720}{90}$
$p^6\overset{2}{C} =$	2) 15 2) 24 33	= 24 24 25 ——— 73	$\frac{1}{1.2}$	$\frac{3285}{90}$
$p^6\overset{3}{C} =$	3) 114 6) 123 222	= 36 240 64 ——— 340	$\frac{1}{1.2.3}$	$\frac{5100}{90}$
$p^6\overset{4}{C} =$	4) 1113 6) 1122	= 160 384 ——— 544	$\frac{1}{1.2.3.4}$	$\frac{2040}{90}$
$p^6\overset{5}{C} =$	5) 11112	= 320	$\frac{1}{1..5}$	$\frac{240}{90}$
$p^6\overset{6}{C} =$	111111	= 64	$\frac{1}{1..6}$	$\frac{8}{90}$
				$\frac{9953}{90}$

Es ist also das sechste Glied nach dem anfänglichen

$\frac{9953\,x^6}{90}$.

Zu S. 131.

Der Mechanismus der recurrirenden Berechnung kann dem bey der Division beobachteten ganz ähnlich ausfallen.

Man stifte eine Verticalcolumne, in welcher die gesuchten Coeffizienten, in der Ordnung, worin sie entstehn, unter einander gesetzt werden, so daß für jeden derselben, um die zu seiner Berechnung nöthigen Zahlen einzuschreiben, eine Neben-Columne frey bleibt.

Die Coeffizienten des gegebenen Exponenten, jeden mit seinem eignen Index multiplicirt, setze man, von unten aufsteigend, auf einen beweglichen Streifen. Diesen lege man jedesmal an die Columne, worin die schon gefundenen A stehn, so an, daß die untersten Glieder von beyden neben einander liegen, berechne alsdann die Producte der andern dabey paarweise zusammengelegten A und a, setze sie in der dazu bestimmten Neben-Columne unter einander, bilde ihre Summe, und dividire diese durch den Index des neugesuchten A, so wird man jenes A selbst erhalten. Der feste Theil des Schemas wird dem gemäß so aussehn:

Columnen für

	$\overset{1}{A}$	$\overset{2}{A}$	$\overset{3}{A}$	$\overset{4}{A}$
A				
$\overset{1}{A}$				
$\overset{2}{A}$		S. :2		
$\overset{3}{A}$			S. :3	
:				S. :4

Wenn sich dasselbe für einen einzelnen bestimmten Fall ausfüllt, z. E. wenn $e^{(2x+4x^2+5x^3+3x^4+6x^5-8x^6..)}$ berechnet werden soll, so ist folgendes Resultat desselben, wobey der, schrittweise von oben herabgehende bewegliche Streifen in seiner letzten Lage dargestellt worden ist.

$\overset{0}{A}$ ist hier = 1

		für $\overset{1}{A}$	$\overset{2}{A}$	$\overset{3}{A}$	$\overset{4}{A}$	$\overset{5}{A}$	$\overset{6}{A}$
$\overset{6}{a} = -48$	$1 = \overset{0}{A}$	2	8	15	12	30	— 48
$\overset{5}{a} = 30$	$2 = \overset{1}{A}$		4	16	30	24	60
$\overset{4}{a} = 12$	$6 = \overset{2}{A}$		S. 12				
			: 2	12	48	90	72
$\overset{3}{a} = 45$	$\frac{43}{3} = \overset{3}{A}$		6	S. 43	$\frac{86}{3}$	$\frac{344}{3}$	215
				: 3			
$\overset{2}{a} = 8$	$\frac{89}{3} = \overset{4}{A}$			$\frac{43}{3}$	S. $\frac{356}{3}$	$\frac{178}{3}$	$\frac{712}{3}$
					: 4		
$\overset{1}{a} = 2$	$\frac{954}{15} = \overset{5}{A}$				$\frac{89}{3}$	S. $\frac{954}{3}$	$\frac{1908}{15}$
						: 5	
	$\frac{9953}{90} = \overset{6}{A}$					$\frac{654}{15}$	S. $\frac{9953}{15}$
							: 6
							$\frac{9953}{90}$

Es ist also das Gesuchte:

$$1 + 2x + 6x^2 + \frac{43}{3}x^3 + \frac{89}{3}x^4 + \frac{954}{15}x^5 + \frac{9953}{90}x^6 \ldots$$

Zum zehnten Kapitel.

Zu §. 137. 138.

a) Logarithmen von Grundformen werden in der That bey Anwendungen der Analysis gefordert; daher ist Uebung in solchen Rechnungen nicht überflüssig. Die Formel der recurrirenden Bestimmung, welcher gemäß, wenn

$$\log(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots) = \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 \ldots + \overset{r}{a}x^r \ldots$$

gesetzt ist, $\overset{1}{a} = \overset{1}{A}$ und allgemein:

$$\overset{r}{a} = \frac{r\overset{r}{A} - 1\overset{r-1}{A}\overset{1}{a} - 2\overset{r-2}{A}\overset{2}{a} \ldots - k\overset{r-k}{A}\overset{k}{a} \ldots - (r-1)\overset{1}{A}\overset{r-1}{a}}{r}$$

kann auf zweyfache Art in Thätigkeit gesetzt werden.

a. Man zieht die Zahlcoeffizienten, welche in ihren einzelnen Gliedern neben den Producten aus den A in die a vorkommen, jedesmal zu den A. Alsdann wird sie, wenn man sich ihrer in dieser Form bedienen will, indem man statt 1, nach und nach, 2, 3, 4 u. s. w. substituirt, so viele Male specialisirt werden müssen, als die Zahl der verlangten Glieder anzeigt und es wird zweckmäßig seyn, dabey jedesmal in ihr anfangs die a wegzulassen, übrigens ihre einzelnen Glieder in eine Verticalreihe unter einander zu setzen, und diese Reihen mit Intervallen neben einander zu stellen *).

$2\overset{2}{A}$	$3\overset{3}{A}$	$4\overset{4}{A}$	$5\overset{5}{A}$
$-\overset{1}{A}$	$-\overset{2}{A}$	$-\overset{3}{A}$	$-\overset{4}{A}$
Summe :2	$-2\overset{1}{A}$	$-2\overset{2}{A}$	$-2\overset{3}{A}$
	Summe :3	$-3\overset{1}{A}$	$-3\overset{2}{A}$
		Summe :4	$-4\overset{1}{A}$
			Summe :5

Wenn an diese Columnen allmälig eine Verticalreihe, in welche die gesuchten Coeffizienten 1, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, ... so wie sie nach und nach hervortreten, unter einander gestellt erscheinen, so daß jedesmal beyderseitige oberste Glieder zusammenfallen, angelegt wird, und die anliegenden a als Factoren für die zugesellten Columnenglieder gebraucht, übrigens die entstandenen Producte nach Vorschrift der jedesmaligen Co-

*) Es ist wohl kaum nöthig zu bemerken, daß auch dabey, weil in der That in diesen Reihen jenseits ihrer zweyten Glieder nur die successiven Vielfachen derselben, diagonal unterwärts gestellt, vorkommen, ein sehr kurzes Verfahren gestattet ist.

kunne behandelt werden, so erhält man aus jeder Columne eins der gesuchten a *).

Um z. E. log (1 + 2x + 3x² + 4x³ + 5x⁴ + 6x⁵ + 7x⁶ ...) zu berechnen, wäre das für diesen Fall individualisirte Schema der Rechnung, weil hier

$\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, $\overset{5}{A}$, $\overset{6}{A}$
2 3 4 5 6 7

Für	$\overset{1}{a}$		$\overset{2}{a}$	$\overset{3}{a}$	$\overset{4}{a}$	$\overset{5}{a}$	$\overset{6}{a}$
[2]	6	—	12	20	30	42	
	—2		—3	—4	—5	—6	
	S.		—4	—6	—8	—10	
	:2		S.	—6	—9	—12	
			:3	S.	—8	—12	
				:4	S.	—10	
					:5	S.	
						:6	

Ausgefüllt durch die Rechnung würde für diesen Fall das Schema so aussehn:

Für	$\overset{1}{a}$		$\overset{2}{a}$		$\overset{3}{a}$		$\overset{4}{a}$		$\overset{5}{a}$		$\overset{6}{a}$	
1	2	2	6	6	12	12	20	20	30	30	42	42
2	S.	2	—2	—4	—3	—6	—4	—8	—5	—10	—6	—12
1	:1	2	S.	2	—4	—4	—6	—6	—8	—8	—10	—10
$\frac{2}{3}$			:2	1	S.	2	—6	—4	—9	—6	—12	—8
$\frac{1}{2}$					:3	$\frac{2}{3}$	S.	2	—8	—4	—12	—6
$\frac{2}{5}$							:4	$\frac{1}{2}$	S.	2	—10	—4
$\frac{1}{3}$									:5	$\frac{2}{5}$	S.	2
											:6	$\frac{1}{3}$

Mithin

$2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^6 \ldots$

das Gesuchte

*) Es wird auch hier genügen die Columne der a ein für alle mal den übrigen voranzustellen, und das Anlegen derselben an diese in Gedanken vorzunehmen. Ein sie enthaltender beweglicher Streifen könnte allerdings erleichtern, ist aber nicht nothwendig.

b. Man zieht die Zahlcoeffizienten zu den a. In diesem Fall ist es am bequemsten, der Formel die Gestalt zu geben, als wenn die successiven a, jedes mit seinem eignen Inder multiplicirt, durch sie gefunden werden sollten.

$$r\overset{r}{a} = r\overset{r}{A} - \overset{1}{a}\overset{r-1}{A} - 2\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} - 3\overset{3}{a}\overset{r-3}{A} \ldots - k\overset{k}{a}\overset{r-k}{A} \ldots - (r-1)\overset{r-1}{a}\overset{1}{A}$$

Man stifte also zwey Verticalcolumnen. In die erste bringe man so fort $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, .. die gegebenen Coeffizienten, in natürlicher Ordnung unter einander gestellt. In die zweyte setze man, von unten aufsteigend, die gesuchten $\overset{1}{a}$, $2\overset{2}{a}$...., $r\overset{r}{a}$, so wie sie aus der Rechnung hervortreten, mit umgekehrten Zeichen über einander, und es wird bequem seyn, wenn dieses am Rande eines beweglichen, an die Columne der A jedesmal anzulegenden Streifens geschieht. Neben der ersten Columne der A müssen alsdann noch andre Verticalcolumnen, welche vorläufig das A, dessen Zahl der ihrigen correspondirt, mit dem eignen Inder multiplicirt, als oberstes Glied in sich aufnehmen, gestiftet werden. Sind nun schon einige der gesuchten Zahlen $\overset{1}{a}$, $2\overset{2}{a}$, $3\overset{3}{a}$, ... gefunden, so lege man die Verticalcolumne, auf welche sie mit umgekehrten Zeichen getragen sind, an die erste der A, so daß die obersten Glieder von beyden zusammentreten, berechne die Producte aller, auf diese Art aus beyden Columnen zusammengetretenen Glieder, setze sie in die folgende Verticalcolumne, deren Zahl identisch ist mit der desjenigen a, wovon diesmal ein Vielfaches gesucht wird (im Zusammenhange der Rechnung allemal die nächstfolgende), und addire die Glieder der Columne. Die Summe wird das nächsthöhere a, mit seinem eignen Inder multiplicirt, darbieten. Man hat also keine weitere Vorarbeit nöthig als das Schema:

	$2\overset{2}{A}$	$3\overset{3}{A}$	$4\overset{4}{A}$ ...
A	S.		
$\overset{1}{A}$	$= 2\overset{2}{a}$	S.	
$\overset{2}{A}$		$= 3\overset{3}{a}$	S.
$\overset{3}{A}$			$= 4\overset{4}{a}$

zu entwerfen; das Eintragen der aus Summation dieser demnächst auszufallenden Columnen entstehenden $2\overset{2}{a}, 3\overset{3}{a}, \ldots$ in eine bewegliche Verticalcolumne, kann erst im Verlauf der Rechnung geschehn, welche damit, daß $\overset{1}{a} = \overset{1}{A}$ gesetzt wird, anhebt. So würde in diese zuerst bloß $-\overset{1}{a}$ kommen; angelegt an die der A, würde bloß das Product $-\overset{1}{a}\overset{1}{A}$ entstehn; dies in die nächste Verticalcolumne gesetzt, würde $2\overset{2}{A} - \overset{1}{a}\overset{1}{A} = 2\overset{2}{a}$ als Summe darbieten. Nun trüge man in der beweglichen Verticalcolumne über $-\overset{1}{a}$ das eben gefundene $-2\overset{2}{a}$; angelegt an die der A, ergäben sich die Producte $-\overset{1}{a}\overset{2}{A} - 2\overset{2}{a}\overset{1}{A}$, eingetragen in die nächste leere Verticalcolumne, entstände $3\overset{3}{A} - \overset{1}{a}\overset{2}{A} - 2\overset{2}{a}\overset{1}{A}$, wovon die Summe $= 3\overset{3}{a}$ u. s. w.

Sollte wie vorhin log $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots..)$ auf diese Art berechnet werden, so füllten sich die Columnen auf nachstehende Art, wobey indessen der die $-\overset{1}{a}, -2\overset{2}{a}, -3\overset{3}{a}, \ldots$ aufsteigend enthaltende als beweglich gedachte Verticalstreifen nur in seiner letzten Lage, bey Abbruch der Rechnung, dargestellt worden ist.

		6	12	20	30
$-4\overset{4}{a} = -2$	$2 = \overset{1}{A}$	-4	-4	-4	-4
$-3\overset{3}{a} = -2$	$3 = \overset{2}{A}$	2	-6	-6	-6
$-2\overset{2}{a} = -2$	$4 = \overset{3}{A}$	$= 2\overset{2}{a}$	2	-8	-8
$-\overset{1}{a} = -2$	$5 = \overset{4}{A}$		$= 3\overset{3}{a}$	2	-10
	$6 = \overset{5}{A}$			$= 4\overset{4}{a}$	2
					$= 5\overset{5}{a}$

Es würde also, die Summen der Verticalcolumnen, durch ihre eignen Indices dividirt, $\overset{2}{a} = \frac{2}{2}$, $\overset{3}{a} = \frac{2}{3}$, $\overset{4}{a} = \frac{2}{4}$, $\overset{5}{a} = \frac{2}{5}$ u. s. w. also $\log(1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 \ldots.)$ zu fünf nachfolgenden Gliedern entwickelt $= 2(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots)$ werden.

Augenscheinlich ist die zweyte Methode viel kürzer und bequemer als die erste.

c) Die independente Bestimmung, daß für $\log(1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots)$ allgemein das nte Glied $\overset{h}{\underset{1..n}{\Sigma}}\left(\frac{(-1)^h}{h} \cdot p^n\overset{h}{C}\right)x^n$, wobey sich die Combinationen aus den gegebenen Coeffizienten, $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots$ als wiederholbaren Elementen erzeugen, läßt sich ohne Weiteres ausüben.

Ist z. E. $\log(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^4 \ldots)$ zu berechnen, und will man das 5te nachfolgende Glied des Resultats, so ergibt für $n = 5$ die Regel:

$$p^5\overset{1}{C} - \tfrac{1}{2}p^5\overset{2}{C} + \tfrac{1}{3}p^5\overset{3}{C} - \tfrac{1}{4}p^5\overset{4}{C} + \tfrac{1}{5}p^5\overset{5}{C}.$$

Nun ist

	angedeutet;		realisirt;	mult. durch		
$p^5\overset{1}{C}$	1	=	6	1	=	6
$p^5\overset{2}{C}$	2) 14	=	10			
	2) 23		24			
			44	$-\frac{1}{2}$	=	-22
$p^5\overset{3}{C}$	3) 113	=	48			
	3) 122		54			
			102	$+\frac{1}{3}$	=	$+34$
$p^5\overset{4}{C}$	4) 1112	=	96	$-\frac{1}{4}$	=	-24
$p^5\overset{5}{C}$	11111	=	32	$+\frac{1}{5}$	=	$+6\frac{2}{5}$

Summe $\frac{2}{5}$

Also das verlangte Glied $\frac{2}{5}x^5$

Für das sechste Glied würde der Coeffizient

$$p^6\overset{1}{C} - \tfrac{1}{2}\,p^6\overset{2}{C} + \tfrac{1}{3}\,p^6\overset{3}{C} - \tfrac{1}{4}\,p^6\overset{4}{C} + \tfrac{1}{5}\,p^6\overset{5}{C} - \tfrac{1}{6}\,p^6\overset{6}{C}.$$

Nun ist

	angedeutet;		realisirt;	mult. mit		
$p^6\overset{1}{C}$ =	6	=	7	1	=	7
$p^6\overset{2}{C}$	2) 15	=	24			
	2) 24		30			
	33		16			
			70	$-\frac{1}{2}$	=	-35
$p^6\overset{3}{C}$	3) 114	=	60			
	6) 123		144			
	222		27			
			231	$+\frac{1}{3}$	=	$+77$
$p^6\overset{4}{C}$ =	4) 1113		128			
	6) 1122		216			
			344	$-\frac{1}{4}$	=	-86
$p^6\overset{5}{C}$ =	5) 111112	=	240	$+\frac{1}{5}$	=	$+48$
$p^6\overset{6}{C}$ =	111111	=	64	$-\frac{1}{6}$	=	$-10\frac{2}{3}$

Summe $\frac{1}{3}$

Also $\frac{1}{3}x^6$ das Verlangte.

Zum eilften Kapitel.

Zu S. 154 — 158.

Als eine kleine Probe von der Berechnung der ursprünglichen Logarithmentafeln, aus denen sich später die vollständigen leicht ableiten lassen, mag hier zuvörderst die Basis des natürlichen Systems, und für jede der ganzen Zahlen von 1 bis 10 der natürliche Logarithme nach den Grundformeln approximativ auf 10 Decimalstellen entwickelt werden.

Man erhält e aus der Reihe $1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots \frac{1}{1.2..n} \ldots$

Die bis zur 11ten Decimale reichenden Glieder derselben sind bis dahin entwickelt:

$1+1 = 2,$

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{1..3} = 0{,}16666666666$

$\frac{1}{1..4} = 0{,}04166666666$

$\frac{1}{1..5} = 0{,}00833333333$

$\frac{1}{1..6} = 0{,}00138888888$

$\frac{1}{1..7} = 0{,}00019841269$

$\frac{1}{1..8} = 0{,}00002480158$

$\frac{1}{1..9} = 0{,}00000275573$

$\frac{1}{1..10} = 0{,}00000027557$

$\frac{1}{1..11} = 0{,}00000002505$

$\frac{1}{1..12} = 0{,}00000000208$

$\frac{1}{1..13} = 0{,}00000000016$

$\frac{1}{1..14} = 0{,}00000000001$

$2{,}7182818284$

Dies Resultat ist, angenommen, die Summe so weit sie aus den angesetzten Theilen berechnet werden kann, sey auf 10 Decimalstellen richtig gebildet, unfehlbar überhaupt bis dahin genau, da $\frac{1}{14}$ ihres letzten Gliedes ihre Approximationsgrenze ist, eine Zahl, die erst in der 13ten Decimalstelle anheben kann.

Die Logarithmen der 10 ersten ganzen Zahlen erhält man bequem aus der Formel:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^{2r-1}}{2r-1} \ldots\right)$$

auf folgende Art.

1) Setzt man für x zuerst $\frac{1}{5}$, so kommt $\log \frac{6}{4} = \log \frac{3}{2}$, wenn man die 7 ersten Glieder der Formel zusammenfaßt:

$$x = 0{,}2$$
$$\frac{x^3}{3} = 0{,}00266666666$$
$$\frac{x^5}{5} = 0{,}00006400000$$
$$\frac{x^7}{7} = 0{,}00000182857$$
$$\frac{x^9}{9} = 0{,}00000005688$$
$$\frac{x^{11}}{11} = 0{,}00000000186$$
$$\frac{x^{13}}{13} = 0{,}00000000006$$

0,20273255403

doppelt $= 0{,}4054651081 = \log \frac{3}{2}$.

Approximationsgrenze: $\frac{x^{15}}{15} \cdot \frac{10}{4} < \frac{x^{13}}{13} \cdot \frac{1}{10}$

2) Setzt man für x zum 2ten Male $\frac{1}{7}$, so gibt die Formel: $\log \frac{8}{6} = \log \frac{4}{3}$, wenn man ihre 6 ersten Glieder zusammenfaßt:

$x = 0{,}14285714285$

$\frac{x^3}{3} = 0{,}00097181729$

$\frac{x^5}{5} = 0{,}00001189980$

$\frac{x^7}{7} = 0{,}00000017346$

$\frac{x^9}{9} = 0{,}00000000275$

$\frac{x^{11}}{11} = 0{,}00000000004$

$0{,}14384103619$

doppelt $0{,}2876820724 = \log \frac{4}{3}$.

Approximationsgrenze: $\frac{x^{13}}{13} \cdot \frac{14}{6} < \frac{x^{11}}{11} \cdot \frac{1}{21}$

3) Setzt man zum 3ten Male $x = \frac{1}{9}$, so geben die 5 ersten Glieder der leitenden Formel $\log \frac{10}{8} = \log \frac{5}{4}$

$x = 0{,}11111111111$

$\frac{x^3}{3} = 0{,}00045724737$

$\frac{x^5}{5} = 0{,}00000338702$

$\frac{x^7}{7} = 0{,}00000002986$

$\frac{x^9}{9} = 0{,}00000000028$

$0{,}11157177564$

doppelt $0{,}2231435513 = \log \frac{5}{4}$.

Approximationsgrenze: $\frac{x^{11}}{11} \cdot \frac{18}{8} < \frac{x^9}{9} \cdot \frac{1}{36}$

4) Setzt man endlich $x = \frac{1}{99}$, so erhält man auf gleichem Wege $\log \frac{100}{98} = \log \left(\frac{50}{49}\right)$, die 3 ersten Glieder der Formel zusammenfassend:

$x = 0{,}01010101010$

$\frac{x^3}{3} = 0{,}00000034353$

$\frac{x^5}{5} = 0{,}00000000002$

$0{,}01010135365$

doppelt $0{,}0202027073 = \log \frac{50}{49}$.

Approximationsgrenze: $\frac{x^7}{7} \cdot \frac{199}{98} < \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{49 \cdot 99}$

Daraus ergibt sich:

$\log \frac{4}{3} = 0{,}2876820724$
$+ \log \frac{3}{2} = 0{,}4054651081$
$\log 2 = 0{,}6931471805$

Dies zu $\log \frac{3}{2}$ addirt gibt:

$\log 3 = 1{,}0986122886$

Log 2 verdoppelt gibt:

$\log 4 = 1{,}3862943611$

Dies zu $\log \frac{5}{4} = 0{,}2231435513$

$\log 5 = 1{,}6094379124$

Von selbst aus $\log 2 + \log 3$ findet sich:

$\log 6 = 1{,}7917594692$

Eben so aus $\log 4 + \log 2$:

$\log 8 = 2{,}0794415416$

Und aus $2 \log 3$:

$\log 9 = 2{,}1972245773$

Aus $\log 2 + \log 5$:

$\log 10 = 2{,}3025850929$

Endlich $\log 10 + \log 5$:

$= \log 50 = 3{,}9120230054$

Davon $\log \frac{50}{49} = 0{,}0202027073$ abgezogen

$\log 49 = 3{,}8918202981$

Davon die Hälfte:

$\log 7 = 1{,}9459101490$

Zu S. 157. N. 4.

Auf die Formel $\log(a+b) = \log a + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \ldots$ gründet sich die Einrichtung der sogenannten Proportionaltheile in den gewöhnlichen logarithmischen Tafeln. Sie verdient in Absicht auf die briggischen Logarithmen eine kurze Erörterung.

Da $\frac{\log A}{\log 10} = \log \text{brigg } A$, so gibt unsre Formel, auf beyden Seiten durch log 10 dividirt:

$$\log \text{brigg}(a+b) = \log \text{brigg } a + \frac{1}{\log 10}\left[\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \ldots\right]$$

Nun sind die gewöhnlichen Tafeln so eingerichtet, daß sie die Logarithmen aller 7ziffrigen Zahlen, die von 1,000000 an, sprungweise jedesmal um 100 Einheiten zunehmend, bis 10000000 fortschreiten, in sich schliessen. So würde also, wenn eine dieser Zahlen a ist, die nächste a + 100 seyn, mithin ihr Logarithme, log brigg (a + 100) (weil höhere Potenzen des Bruchs $\frac{100}{a}$ bey einer Berechnung, die nicht über sieben Decimalstellen hinausgehn soll, wegfallen,) $= \log \text{brigg } a + \frac{1}{\log 10} \cdot \frac{100}{a}$ seyn. Da nun log brigg (a + 100) in den Tafeln selbst steht, so wird man unmittelbar aus ihnen durch Subtraction log brigg (a + 100) — log brigg a, der Kürze wegen durch Δ angedeutet, nehmen können, und also $\frac{1}{\log 10} \cdot \frac{100}{a} = \Delta$ setzen dürfen. Ist nun b kleiner als 100, so gilt um so mehr die Formel $\log \text{brigg}(a+b) = \log \text{brigg } a + \frac{1}{\log 10} \cdot \frac{b}{a}$ und geht, in ihr für $a = \frac{100}{\log 10 \cdot \Delta}$ gesetzt, in die gleichgeltende $\log \text{brigg}(a+b) = \log \text{brigg } a + \frac{b}{100}\Delta$ über.

Dieser Zusatz, $b \cdot \frac{\Delta}{100}$, welcher dem Logarithmen der Zahl a gegeben werden muß, wenn die Zahl a selbst um den neuen Theil b zugenommen hat, ist der sogenannte Proportionaltheil. Die Tafeln enthalten, für jedes Δ, welches allmälig in ihnen hervortritt, und für jeden von den neun Werthen, die b als Zehner haben kann, das berechnete $b \cdot \frac{\Delta}{100}$, wovon denn ein Zehntel den Betrag für jeden gleichen Werth, den b als Einer erhalten mögte, darbieten muß, welcher also bloß durch Hinabrücken des Comma um eine Stelle, in den für b als Zehner bereit liegenden $b \cdot \frac{\Delta}{100}$, erhalten werden kann.

Um z. E. den Logarithmen der Primzahl 19 zu erhalten, würde in Gemäßheit der Formel n 6.

$$\log 19 = \tfrac{1}{2}\log 18 + \tfrac{1}{2}\log 20 + 2\left(\frac{1}{2 \cdot 19^2} + \frac{1}{4 \cdot 19^4} + \frac{1}{6 \cdot 19^6} \cdots\right)$$

gesetzt werden, wobey $\log 18 = 2 \log 3 + \log 2$ und $\log 20 = \log 5 + \log 4$ als bereits früher gefunden vorausgesetzt werden durften.

Man hätte übrigens das Gesuchte auch durch die einfache Formel: $\log (z - 1) = \log z - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \ldots\right)$ erhalten können:

$$\log 19 = \log 20 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2 \cdot 20^2} + \frac{1}{3 \cdot 20^3} \cdots\right)$$

Allerdings würde man im letzten Fall fast doppelt so viel Glieder als im ersten in die Summe aufzunehmen haben, um gleiche Näherung zu erhalten. Aber doppelt so mühsam würde die Rechnung nicht werden, da doch die unpaaren Potenzen berechnet werden müssen, wenn die paaren es auch allein sind, die in die Summe aufgenommen werden, und

Potenzen von 19 viel beschwerlicher zu berechnen sind, als Potenzen von 20. Im Gegentheil würde sich das Resultat leichter nach der zweyten Formel als nach der ersten zu Stande bringen lassen. Und so kann dieses Beyspiel zur Berichtigung der nicht immer gehörig begründeten Urtheile über raschere oder langsamere Convergenz approximativer Formeln, und damit zusammenhängende geringere oder größerer Leichtigkeit der nach ihnen anzustellenden Rechnungen dienen.

Zu S. 160 — 162.

Da Logarithmenberechnungen theoretisch und practisch zu den wichtigsten Arbeiten der Analysis gehören, so verdient allerdings der Mechanismus derselben zu möglichster Geschmeidigkeit gebracht zu werden.

I. Will man bey der Aufgabe: zu einer beliebigen Zahl den Logarithmen zu finden, den directen Weg einschlagen, daß man die Zahl, nachdem sie durch ihre eigne höchste Ziffer dividirt worden, in Factoren der Form $1 + \frac{x}{10^m}$ auflöst, so gibt es schwerlich für die erste dieser Divisionen, wo $n = 1$ ist, eine Abkürzung des ursprünglichen Divisionsverfahrens. Man wird also Anfangs, wo die vorliegende Zahl die Form $1 + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \ldots$ hat, unmittelbar durch $1 + \frac{a}{10}$ an ihr zu dividiren, und den Quotienten auf so viel Decimalen, als die beabsichtigte Näherung der Rechnung nöthig macht, zu entwickeln haben. Aber von da an kann die allgemeine Divisionsregel:

$$\left(1 + \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right) : \left(1 + \frac{a}{10^n}\right) = 1$$

$$+ \left(\frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right) - \frac{a}{10^n}\left(\frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right)$$

$$+ \frac{a^2}{10^{2n}}\left(\frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right) - \ldots$$ abkürzend eintreten.

Dieser Regel gemäß würde man nemlich, um $1 + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}}$ durch $1 + \frac{a}{10^n}$ zu dividiren, zuvörderst den Divisor selbst aus der Form des Dividend abzuschneiden haben, und wenn alsdann der Rest, $\left(\frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right)$ fortlaufend wiederholt durch den zweyten Theil des abgeschnittenen Divisors multiplicirt, die Producte mit regelmäßig abwechselnden Zeichen zur Einheit hinzuaddirt würden, müßte man den gewünschten Quotienten erhalten.

Hätte man z. E. die Zahl 1,839, so würde ihr erster Factor 1,8, und die damit ursprünglich zu vollziehende

Division ergäbe:	1,02166666666 .....
darin 1,02 abgeschnitten	1,02)166666666
fortld. 0,02 multipl.	+ 3333333
und mit abwechseln-	+ 66666
den Zeichen zu 1	— 133
addirt, käme	+ 26
	1,00163399892

als das Resultat der an jener Zahl durch 1,02 zu vollziehenden Division. Ebenso mit diesem verfahren:

1,001)63399892
— 63399
+ 63
1,00063336556

erhielte man den Quotienten der neuen Division durch 1,001, und daran Gleiches vollzogen:

1,0006)3336556
— 2001
1,00003334555

den Quotienten, welcher aus fernerer Division durch den Divisor 1,0006 entstehen müßte. Aber bey den folgenden Divisionen ergibt sich die Möglichkeit neuer bedeutender Ab-

kürzung. Da aus $\left(1+\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^{n+1}}+\frac{c}{10^{n+2}}\ldots\right):\left(1+\frac{a}{10}\right)$ nach den Grundregeln der Division $=1+\left(\frac{b}{10^{n+1}}+\frac{c}{10^{n+2}}\ldots\right)$ $-\left(\frac{b}{10^{n+1}}+\frac{c}{10^{n+2}}\ldots\right)\frac{a}{10^n}+\left(\frac{b}{10^{n+1}}+\frac{c}{10^{n+2}}\ldots\right)\frac{a^2}{10^{2n}}\ldots$ entsteht, so darf man offenbar alle Glieder jenseits der beyden ersten in dieser Form weglassen, wenn man die Rechnung nur bis an die 2nte Decimalstelle treiben will. Es ist also folgende Regel statthaft:

Soll $\left(1+\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^{n+1}}+\frac{c}{10^{n+2}}+\ldots\frac{k}{10^{2n-1}}\ldots\right)$, durch $+\frac{a}{10^n}$ dividirt, und die Bestimmung des Quotienten nicht über die $2n-1$te Decimalstelle hinaus getrieben werden, so lösche man nur im Dividend $\frac{a}{10^n}$, d. h. den Theil, welcher dem letzten Gliede des zweytheiligen Divisors gleich ist. Auf diese Art also allmälig im Dividend nach der Reihe $\frac{a}{10^n}$, $\frac{b}{10^{n+1}}\ldots\frac{k}{10^{2n+1}}\ldots$ weglassen, wobey denn zuletzt 1 stehn bleibt, wird heißen, ihn durch $1+\frac{a}{10^n}$, $1+\frac{b}{10^{n+1}}$, ... $1+\frac{k}{10^{2n-1}}$ nach und nach dividirt, dabey zuletzt als Quotienten 1 erhalten zu haben. Ist also der vorliegende Bruch zu 2n Decimalstellen entwickelt, und die Division, welche in Factoren der Form $1+\frac{x}{10^m}$ zerlegt, so weit vorgerückt, daß der nte dieser Factoren gefunden werden kann, d. h. ist die Zahl, welche ferner in Factoren aufgelöst werden soll, so gebildet, daß sie zuerst in der nten Decimale hinter 1 eine bedeutende Ziffer führt; so braucht man nur allmälig diese Ziffer und jede folgende bis an die letzte, also jede

von der nten bis an die 2nte zum zweyten Theile einer Form, deren erster Theil 1 ist, zu machen, und man wird die Factoren der Gestalt $1+\frac{x}{10^m}$, wodurch jene Zahl ferner zu dividiren ist, um einen Quotienten zu geben, der bis an die 2nte Decimalstelle mit 1 zusammenfällt, ohne weitere Rechnung erhalten. Man dürfte noch bequemer sagen: Soviele 0 im Ausdruck der vorliegenden Zahl von der Form $1+\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^{n+1}}+\ldots$ zwischen 1 und ihrer ersten bedeutenden Ziffer $\frac{a}{10^n}$ stehn, eben soviele von den auf die nemliche folgenden darf man so wie diese selbst hervorheben, um jede zum zweyten Theile einer Form von der Gestalt $1+\frac{x}{10^m}$ zu erheben.

In dem obigen Beyspiele war die Division an der anfänglichen Zahl 1,839 schon soweit getrieben, daß der Quotient 1,0000333455.. geworden war.

Hier ist also das n der allgemeinen Formel $=5$, und man wird 1,00003, 1,000003, 1,0000003, 1,00000004, 1,000000005, ohne weitere Rechnung als die folgenden Divisoren ansetzen dürfen, so daß der letzte Quotient bis auf 9 Decimalen mit 1 zusammenfallen muß.

Da für gewöhnliche Rechnungen dieser Art eine Genauigkeit auf 7 Decimalen verlangt zu werden pflegt, so genügt es dabey, $n=4$ zu setzen, und also die Divisionen, wodurch sich die Zahl in Factoren von der Form $1+\frac{x}{10^m}$ entwickelt, nur fortzusetzen, bis der Quotient in seinen 3 ersten Decimalen 0 enthält, wo man denn die 4te und die 3 nach ihr folgenden, als zweyten Theile der Factoren der Form $1+\frac{x}{10^m}$, welche zu suchen sind, ansetzen kann.

II. Auch bey der allmäligen Bestimmung der Factoren von der Form $1 + \frac{x}{10^m}$, wodurch ein echter Decimalbruch der Einheit immer näher gerückt wird, sind Abkürzungen des an sich schon leichten Mechanismus möglich.

Hat man den gegebenen Bruch, wie im Texte geschehn, durch $1 - \left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right)$ dargestellt, wo a, b, c, u. s. w. die nonadischen Ergänzungen derjenigen Ziffern seines ursprünglichen Ausdrucks andeuten, welche noch nicht selbst $= 9$ sind, und multiplicirt man ihn in der neuen Gestalt mit $1 + \frac{a}{10^n}$, so wird das Product:

$$1 - \left(\frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right) - \frac{a}{10^n}\left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^{n+1}} + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots\right) + \ldots$$

Der letzte Theil des Products kann offenbar höchstens zur $2n - 1$ten Decimalstelle aufsteigen, soll also die Rechnung nur bis an die $2n - 1$te Decimalstelle getrieben werden, so heißt: den Bruch $1 - \frac{a}{10^n} - \frac{b}{10^{n+1}} - \frac{c}{10^{n+2}} \ldots$ mit $1 + \frac{a}{10^n}$ multipliciren, nichts anders, als: $-\frac{a}{10^n}$ aus ihm weglassen, und umgekehrt; es wird also allmälig auch $\frac{b}{10^{n+1}}$, $\frac{c}{10^{n+2}} \ldots$ aus ihm entfernt, d. h. er wird in 1 verwandelt werden, wenn man ihn fernerhin mit $1 + \frac{b}{10^{n+1}}$, $1 + \frac{c}{10^{n+2}} \ldots$ multiplicirt. Man erhält auf diese Art die Factoren jenseits $1 + \frac{a}{10^n}$ ohne alle Rechnung von selbst. Für $n = 1$ gewährt diese Regel nichts Brauchbares. Der Grad von Näherung, welchen man bey dem Resultate der Rechnung zu erlangen gedenkt, bestimmt die Art wie diese Abkürzung gebraucht

werden soll; will man bis zu 2n-2 Decimalen gehn, so müssen die n-1 ersten Decimalen des anfänglichen Bruchs durch ursprüngliche Multiplicationen mit Brüchen von der Form $1+\frac{a}{10^m}$ schon zu 9 geworden, und das Product bis auf die n-1 nachfolgenden Decimalstellen richtig berechnet seyn. Unter dieser Voraussetzung wird alsdann allmälig die nonadische Ergänzung jeder Ziffer in diesen nachfolgenden Decimalstellen als das $\frac{a}{10^m}$ in dem Schema $1+\frac{a}{10^m}$ angesetzt, und auf solche Art die folgenden Factoren, durch deren fortlaufende Multiplication der anfängliche Bruch als erst in der 2n-1ten Decimalstelle von 1 verschieden geworden erscheinen muß, erhalten.

Wollte man z. E. auf 20 Decimalstellen die Näherung treiben, so wäre $2n-2=20$, also $n-1=10$; man müßte also durch ursprüngliches Multipliciren nach der ersten Grundregel den auf zwanzig Decimalen zu entwickelnden anfänglichen Bruch, schon so weit gebracht haben, daß in seinen 10 ersten Stellen lauter 9 erschienen; aus den nonadischen Ergänzungen der folgenden 10 Ziffern, jede allmälig als ein $\frac{a}{10^m}$ genommen, ließen sich denn die 10 folgenden Factoren von der Form $1+\frac{a}{10^m}$ formiren.

Wollte man auf 8 Decimalen rechnen, welches der Sicherheit wegen, selbst wenn im letzten Resultate nur 7 verlangt werden, rathsam ist, so würde $2n-2=8$, mithin $n-1=4$; man müßte nach der Grundregel die Factoren bestimmen, und ursprünglich mit ihnen multipliciren, bis die 4 ersten Decimalstellen des Bruchs eben soviel 9 enthielten, aus den nonadischen Ergänzungen der 4 folgenden,

jede einmal als $\frac{a}{10^m}$ genommen, ließen sich die 4 nächstfolgenden Factoren der Gestalt $1 + \frac{a}{10^m}$ sogleich zusammensetzen.

Die meisten Logarithmenberechnungen verlangen die Logarithmen der ganzen Zahlen auf nicht mehr als 7 Decimalstellen. Für sie können die angehenkten Tabellen, die zu dieser Absicht erforderlichen fundamentalen Logarithmen zusammengezogen, und auf folgende Inbegriffe zurückgebracht werden.

Hülfstabelle zur Berechnung natürlicher Logarithmen auf 7 Decimalen.

Zahl.	Log.	1, Log.	1,0 Log.	1,00 Log.	1,000 Log.
9	2,19722457	64185388	08617769	00895974	00089959
8	2,07944154	58778566	07696104	—796816	— 79968
7	1,94501014	53062825	06765864	—697561	— 69975
6	1,79175946	47000362	05826890	—598207	— 59982
5	1,60943791	40546510	04879010	—498754	— 49987
4	1,38629436	33647223	03922071	—399202	— 39992
3	1,09861228	26236426	02955880	—299550	— 29995
2	0,69314718	18232155	01980262	—199800	— 19998
1		09531017	00995033	—099950	— 09999

Zahl.	1,0000 Log.	1,00000 Log.	1,000000 Log.	1,0000000 Log.	Zahl.	Log.
9	00008999	00000899	00000089	00000008	10^8	18,42068074
8	——7999	— —7—	— — 7	— — 7	10^7	15,11809565
7	——6 —	— —6—	— — 6	— — 6	10^6	13,81551055
6	——5 —	— —5—	— — 5	— — 5	10^5	11,51292546
5	——4 —	— —4—	— — 4	— — 4	10^4	9,21034637
4	——3 —	— —2—	— — 3	— — 3	10^3	6,90775527
3	——2 —	— —3—	— — 2	— — 2	10^2	4,60517018
2	——1 —	— —1—	— — 1	— — 1	10^1	2,30258509
1	——0 —	— —0—	— — 0	— — 0		

Hülfstabelle zur Berechnung Briggischer Logarithmen auf 7 Decimalen.

Zahl.	Log.	1, Log.	1,0 Log.	1,00 Log.	1,000 Log.
9	95424250	27875360	03742649	00389116	00039068
8	90308998	25527250	03342375	—346053	— 34729
7	84509804	23044892	02938377	—302947	— 30389
6	77815125	20411998	02530586	—259798	— 26049
5	69897000	17609125	02118929	—216606	— 21709
4	60205999	14612903	01703333	—173371	— 17368
3	47712125	11394335	01283722	—130093	— 13026
2	30102999	07918124	00860017	—086772	— 08685
1		04139268	00432137	—043407	— 04342

Zahl.	1,0000 Log.	1,00000 Log.	1,000000 Log.	1,0000000 Log.
9	00003908	00000390	00000039	00000003
8	——3474	—— 347	— — 34	— — 3
7	——3039	—— 304	— — 30	— — 3
6	——2605	—— 260	— — 26	— — 2
5	——2171	—— 217	— — 21	— — 2
4	——1737	—— 173	— — 17	— — 1
3	——1302	—— 130	— — 13	— — 1
2	——0868	—— 086	— — 08	— — 0
1	——0434	—— 043	— — 04	— — 0

Um Mechanismus und Umfang gewöhnlicher Logarithmenberechnung zu übersehn, dienen folgende Beyspiele:

1. Man sucht log brigg 1839

A. Nach der ersten Methode

1839 divid. durch 1000; davon log brigg = 3,
1,839 — — 1,8 — — — 0,25527250
1,02)1666666 — — 1,02 — — — 0,00860017
— 33333
+ 666
— 1
1,001)633998 — — 1,001 — — — 0,00043407
— 633
1,0006)33365 1,0006 — — 0,00026049
— 21
1,000033344

daraus von selbst:
1,00003 — — 0,00001302
1,000003 — — 0,00000130
1,0000003 — — 0,00000013
1,00000004 — — 0,00000001

Log brigg 1839 = 3,2645817

B. Nach der zweyten Methode

1839 : 2000 gibt		log brigg 2000	= 3,3010299
0,0195	mult. mit 1,08	dav. log brigg	= 0,03342375
7356000			
0,99306000	— — 1,006	— — —	0,00259798
595836			
0,99901836	— — 1,0009	— — —	0,00039068
89911			
0,99991747	daraus von selbst { 1,00008	— — —	0,00003474
	1,000002	— — —	0,00000086
	1,0000005	— — —	0,00000021
	1,00000002	— — —	0,00000000
			S. 0,0364482
	ab von Log brigg 2000		
		Log brigg 1839	= 3,2645817

2. Man sucht log nat 370072

A. Nach der ersten Methode

370072	divid. durch 30000;	dav. log nat	= 12,611537750
1,2)33357333	— — 1,2	— — —	0,182321556
1,02)7977777	— — 1,02	— — —	0,019802627
— 159555			
+ 3191			
— 62			
1,007)821351	— — 1,007	— — —	0,006975613
— 5749			
+ 40			
1,0008)15642	— — 1,0008	— —	0,000799680
— 12			
1,000015630	daraus von selbst { 1,00001	— —	0,000009999
	1,000005	— —	0,000004999
	1,0000006	— —	0,000000599
	1,00000003	— —	0,000000029
	Log nat 370072	=	12,82145285

B. Nach der zweyten Methode

370072 : 40000 gibt			log 400000 =	12,8992197
0,92518	mult. mit	— 1,07	davon log =	0,06765864
6476260				
0,98994260	— —	1,01	— —	0,00905033
989942				
0,99984206	— —	1,0001	— —	0,00009999
9998				
0,99994202	daraus	1,00005	— —	0,00004999
	von	1,000007	— —	0,00000699
	selbst	1,0000009	— —	0,00000089
			Summe	0,07776683
		Abgezogen v. log 400000		
		Log nat 370072	=	12,8214529

Wenn umgekehrt ein Logarithme gegeben wäre, und die ihm zugehörige Zahl gefunden werden sollte, so würde der Umfang des dazu erforderlichen Calculs an nachstehendem Beyspiel abgenommen werden können.

a) Man sucht die Zahl, deren briggischer Logarithme = 0,5682863 ist.

davon	0,47712125..	= log brigg num 3		
	0,09106504..			Product
—	07918124	= — — —	1,2	
	0,07198380			3,6
—	0,00860017	= — — —	1,02	72
	0,00338363			3,672
—	0,00302947	= — — —	1,007	25704
	0,00035416			3,697704
—	0,00034729	= — — —	1,0008	29581
	0,00000687			3,7006621
—	0,00000434	= — — —	1,00001	370
	0,00000253			3,7006991
—	0,00000217	= — — —	1,000005	185
	0,00000036			3,7007176
—	0,00000034	= — — —	1,0000008	29
				3,7007205

Es wird also die gesuchte Zahl 3,7007205

b. Man sucht die Zahl, deren natürlicher Logarithme = 5,27468559 ist.

			Product
davon	4,60517018	= log nat 100	
	0,66931541		
—	0,64185388	— — 1,9	
	0,02766153		190
—	0,01980262	— — 1,02	38
	0,00785891		193,8
—	0,00697561	— — 1,007	1 3566
	0,00088330		195,1566
—	0,00079968	— — 1,0008	15612
	0,00008362		195,31272
—	0,00007999	— — 1,00008	1562
	0,00000363		195,32834
—	0,00000299	— — 1,000003	58
	0,00000064		195,32892
—	0,00000059	— — 1,0000006	11
			195,32903

Zur Probe der letzten Rechnung mag der angenommene natürliche Logarithme durch Multiplication mit dem Modulus des briggischen Systems in einen briggischen verwandelt werden:

5,2746856
0,43429448
2,10987424
15824056
2109874
105493
47471
2109
210
42
2,2907667 = log brigg 195,3290

Zum dreyzehnten Kapitel.

Zu S. 190 — 195.

Es ist kein Mangel an Allgemeinheit, wenn im Lehrbuche nur Formen von der Gestalt $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, die also logarithmisch entwickelt durch $\frac{\alpha}{\cos\varphi}(\cos\varphi + (\sin\varphi)\sqrt{-1})$ dargestellt werden, bey der Regel für Multiplication und Division gebraucht sind. Denn Formen wie $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ fallen unter dasselbe Schema, sobald man darin, welches freysteht, für $+\varphi$ setzt $-\varphi$, und so würde z. E.

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \cdot (\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \frac{\alpha}{\cos\varphi}(\cos\varphi + (\sin\varphi)\sqrt{-1})\,\frac{\alpha}{\cos(-\varphi)}(\cos(-\varphi) + (\sin(-\varphi))\sqrt{-1}) = \frac{\alpha^2}{\cos\varphi^2}(\cos(\varphi-\varphi) + (\sin(\varphi-\varphi))\sqrt{-1}) = \frac{\alpha^2}{\cos\varphi^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

Bey Multiplicationen und Divisionen partiell imaginärer Formen gewährt die Logarithmenrechnung schwerlich eine reelle Erleichterung.

Denn soll $(\alpha + \beta\sqrt{-1})$. oder: $(\gamma + \delta\sqrt{-1})$ berechnet und auf die Grundform $A + B\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden, so ist offenbar folgende Weitläuftigkeit nöthig.

Man nehme:

$\log\beta - \log\alpha = \log \operatorname{tg}\varphi$, und daraus φ, $\log\alpha - \log\cos\psi = \log\left(\frac{\alpha}{\cos\psi}\right)$

So hat man auch $\varphi \pm \psi$ und dadurch:

$$\left[\log\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right) \pm \log\left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right)\right] + \log\cos(\varphi \pm \psi) = \log A$$

$\log\delta - \log\gamma = \log \operatorname{tg}\psi$, und daraus ψ, $\log\gamma - \log\cos\psi = \log\left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right)$

$$\left[\log\left(\frac{\alpha}{\cos\psi}\right) \pm \log\left(\frac{\gamma}{\cos\psi}\right)\right] + \log\sin(\varphi \pm \psi) = \log B$$

woraus denn A und B selbst abgeleitet und alsdann $A + B\sqrt{-1}$ formirt werden kann. Wären α, β, γ, δ,

bedeutend große Zahlen, so würden die gewöhnlichen Tafeln nicht hinreichen.

Für Potenzirungen hingegen bringt diese Rechnung, wenn α und β nicht über die Tafeln hinausgehn, Vortheil. Um $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^n = A + B\sqrt{-1}$ zu finden, wird man zuvörderst $\log \beta - \log \alpha = \log tg\,\varphi$, dadurch nicht allein φ, sondern auch $\log \alpha - \log \cos \varphi = \log \frac{\alpha}{\cos \varphi}$ haben; aus φ sogleich $n\varphi$ ableiten, und dann $\log\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right) + \log \cos n\varphi = \log A$, und $\log\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right) + \log \sin n\varphi = \log B$; daraus endlich $A + B\sqrt{-1}$ erhalten.

Sollte z. E. $(\overset{\alpha}{3{,}275484} + \overset{\beta}{2{,}139477}\sqrt{-1})^{10=n}$ berechnet werden, so wäre

$$
\begin{array}{lll}
\log \beta & = 0{,}3303077 & \\
-\log \alpha & = 0{,}5152755 \; (1) & \\
\hline
\log tg\,\varphi & = 9{,}8150322-10, & \text{also } \varphi = 33^\circ 9' 6'' \\
(1)-[\log \cos \varphi & = 9{,}9228427-10] & \text{und } n\varphi = 331^\circ, 31' \\
\hline
 & & = 360^\circ - 28^\circ 29' \\
\log\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right) & = 0{,}5924328 & \\
.\, n & = 10 & \\
\hline
\log\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)^n & = 5{,}9243280 \; (2) & \\
+\log \cos n\varphi & = 9{,}9439671-10 & \\
\hline
\log A & = 5{,}8682951 & \text{also } A = 738406{,}0 \\
(2)+[\log \sin n\varphi & = 9{,}6784307-10 + \log(-1)] & \\
\hline
+\log B & = 5{,}6027587 + \log(-1) & \text{also } B = -400644{,}0
\end{array}
$$

Folglich das Resultat: $738406 - 400644\sqrt{-1}$

Anhang III.

Entwicklung einiger Radicalgrößen.

Erster Abschnitt.

Wenn in der Elementar-Arithmetik von Radicalgrößen die Rede ist, so denkt man sich unter ihnen bestimmte und unzweydeutige Zahlen. Die allgemeine Arithmetik erweitert die Bedeutung solcher Ausdrücke dahin, daß jeder derselben mehrere obschon meistens hypothetische Werthe von der Form $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ anzunehmen fähig geachtet werden muß. Es wird also allenthalben, wo dergleichen in die Rechnung eingeführt werden müssen, wichtig, nicht allein ihre einzelnen Werthe nach einer sicheren Regel angeben, sondern auch die Art und Form derselben bestimmen, und sie nach Verschiedenheit derselben classificiren zu können.

Ein einzelner Werth dieser Art kann entweder 0, oder reell, oder rein imaginär, oder partiell imaginär werden. Zwey solche, im Allgemeinen unter das Schema $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ fallende, Werthe sollen verwandt heißen, wenn ihre reellen Theile, abgesehn von den Zeichen, die sie führen, unter sich, und eben so auch ihre imaginären Theile, identisch sind; disparat mögen sie genannt werden, sobald dies nicht stattfindet. Verwandte Ausdrücke solcher Art, die sich daher ohne Rechnung aus einander ableiten lassen, können sich also entweder gänzlich aufheben; oder gänzlich identisch seyn; oder ihre reellen Theile können identisch, dagegen aber ihre imaginären Theile sich aufhebend seyn (in welchem Falle sie wie

$\alpha+\beta\sqrt{-1}$ und $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ mit der Benennung imaginär gepaarter belegt zu werden pflegen); oder endlich ihre reellen Theile können sich aufheben, ihre imaginären identisch seyn (wo sie wie $-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ und $+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, nach Analogie, reell gepaarte heißen mögen). Dieser Unterscheidung gemäß wird eine Classification der einzelnen Werthe, welche aus Radicalgrößen, so wohl einzelnen, als mit einander verflochtenen, entstehn, sofort möglich gemacht.

Als erste Probe mögen die Fundamentalgrößen $\sqrt[n]{(\pm\alpha)}$, $\sqrt[n]{(\pm\beta\sqrt{-1})}$, $\sqrt[n]{(\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1})}$ dienen.

A) Die Form $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ kommt in Gemäßheit der Theorie (S. 200) auf $\sqrt[n]{(+\alpha)}\cdot\sqrt[n]{1}$, also die Untersuchung über die Vieldeutigkeit derselben und die Art ihrer einzelnen Werthe auf die über $\sqrt[n]{1}$ in gleicher Beziehung zurück.

Die einzelnen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ entstehn aus der Formel $\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2h\pi}{n}+\left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$ am einfachsten, wenn man für h alle ganzen positiven Zahlen von 0 bis an n substituirt. Es ist indessen ebensowohl gestattet, alle negativen ganzen Zahlen von 0 bis an n für h zu nehmen; allgemein man darf für h, gleichviel ob positiv oder negativ, n auf einander folgende ganze Zahlen, welche man will, setzen, und wird jedesmal die n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ erhalten.

1. Kein Werth von $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ kann 0, oder dem andern identisch werden (S. 198).

2. Reelle Werthe hat $\sqrt[n]{(+\alpha)}$, wofern n eine paare Zahl ist, nur zwey, sich aufhebende. Man erhält sie, wenn in der

allgemeinen Formel $\sqrt[n]{(+\alpha)}\left[\cos\frac{2h\pi}{n}+\left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$ für h entweder 0 oder $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird. Wenn n eine unpaare Zahl seyn soll, so gibt es nur einen solchen, für $h=0$. Er wird $\sqrt[n]{(+\alpha)}$, so wie jene beyden $+\sqrt[n]{(+\alpha)}$ und $-\sqrt[n]{(+\alpha)}$ (S. 197).

3. Rein imaginäre Werthe hat $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ nur, wenn n durch 4 theilbar ist, und alsdann zwey sich aufhebende *). Denn für solche muß $\cos\frac{2h\pi}{n}=0$ werden, welches, da $\frac{2h\pi}{n}<2\pi$ bleiben muß, nur dann geschehen kann, wenn $\frac{2h\pi}{n}=\frac{1}{2}\pi$, also $h=\frac{n}{4}$, oder wenn $\frac{2h\pi}{n}=\frac{3}{2}\pi$, mithin $h=\frac{3n}{4}$ ist. Man erhält im ersten Falle: $+\sqrt[n]{(+\alpha)}\cdot\sqrt{-1}$, im andern $-\sqrt[n]{(+\alpha)}\cdot\sqrt{-1}$.

4. Jeder partiell imaginäre Werth von $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ hat unter den übrigen einen imaginär gepaarten (S. 197).

5. Nur wenn n eine paare Zahl ist, kann und muß jeder nicht rein imaginäre Werth von $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ einen reell gepaarten mit sich führen.

Sey der hte unter jenen Werthen $\sqrt[n]{(+\alpha)}\left[\cos\frac{2h\pi}{n}+\left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$, ein andrer, der kte $=\sqrt[n]{(+\alpha)}\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$. Sollen die Sinus

*) Es muß also Seite 198 Zeile 2 das Wort partiell wegfallen.

zweyer Zahlen, jede unter 2π liegend, identisch, die Cosinus sich aufhebend seyn, so müssen beyde zusammen $= \pi$ oder $= 3\pi$ betragen, mithin: $\left(\frac{2k+2h}{n}\right)\pi = \pi$ oder 3π, folglich: $k+h=\frac{n}{2}$ oder $\frac{3n}{2}$ seyn. Jedoch sind die Fälle, wo beyde gleich unter einander würden, also $h=k=\frac{n}{4}$ oder $\frac{3n}{4}$ wäre, als Ausnahme von der Regel zu betrachten, indem für sie gepaarte rein imaginäre Werthe, laut 3, entspringen. Ist n paar, so ist dies möglich. Die Zahl der Fälle, wo $h+k=\frac{n}{2}$, oder $k=\frac{n}{2}-h$, beträgt offenbar, da k nicht negativ werden soll, $\frac{1}{2}n+1$. Die Zahl derer, wo $h+k=\frac{3n}{2}$, oder $k=\frac{3n}{2}-h$, weil k kleiner bleiben soll als n ist, $\frac{1}{2}n-1$. Es gibt also in Allem deren n, so oft n nicht durch 4 theilbar ist, alsdann aber deren $n-2$; das heißt: jeder nicht rein imaginäre Werth von $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ findet in der Reihe der übrigen einen reell gepaarten. Sobald hingegen n unpaar, gibt es für keinen jener Werthe unter den übrigen einen reell gepaarten.

6. Ist n paar, so gibt es für jeden Werth von $\overline{\sqrt[n]{(+\alpha)}}$ einen unter den übrigen, der sich mit ihm aufhebt; ist n unpaar, so ist dies für keinen möglich. Man darf also $+\overline{\sqrt[n]{(+\alpha)}} = -\overline{\sqrt[n]{(+\alpha)}}$ setzen, wenn n paar, aber nicht wenn es unpaar ist.

Sey der eine Werth von $\overline{\sqrt[n]{(+\alpha)}} = \sqrt[n]{(+\alpha)}\left[\cos\frac{2h\pi}{n} + \left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$. Soll ein andrer $= \sqrt[n]{(+\alpha)}$

$\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$ das Umgekehrte des ersten seyn, so müssen $\frac{2h\pi}{n}$ und $\frac{2k\pi}{n}$ Zahlen darstellen, die um $\pm\pi$ differiren. Also $\frac{2h}{n} - \frac{2k}{n} = \pm 1$, oder $h = \pm\frac{n}{2} + k$. Jedes Glied aus der ersten Hälfte der Reihe von Werthen, die $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ der Formel gemäß annimt, ist das Umgekehrte des gleichvielsten in der zweyten Hälfte. Auch dieser Satz, sobald n paar ist, macht es möglich, aus einigen Werthen von $\sqrt[n]{(+\alpha)}$, sogleich andre zugehörige abzuleiten *). Er kann auch als unmittelbare Folge der beyden vorhergehenden betrachtet werden.

Den ersten Werth für $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2}{n}\pi + \left(\sin\frac{2}{n}\pi\right)\sqrt{-1}$ wird man aus den Tafeln zu nehmen haben. Man könnte auch ohne die Tafeln allmälig zu jedem folgenden aufsteigen, bequemer aber erhält man auch sie aus den Tafeln.

7. Die Zahl der unter $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ enthaltenen disparaten partiell imaginären Werthe ist, für ein durch 4 theilbares n,

---

*) Hat man z. E. $\sqrt[8]{1}$ zu entwickeln, so erhält man den ersten partiell imaginären Werth dieses Ausdrucks $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$. Dieser zieht einen imaginär gepaarten $= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$; einen reell gepaarten $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$, und einen umgekehrten $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$ nach sich. Man hat also alle, da auch, vermöge 1, zwey reelle, und zwey rein imaginäre, $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ statthaben müssen.

$= \frac{n}{4} - 1$; für ein paares nicht durch 4 theilbares n, $= \frac{n-2}{4}$; jeder von ihnen ist von einem reell gepaarten, einem imaginär gepaarten, einem sich gegen ihn aufhebenden begleitet. Ist n unpaar, so gibt es solcher disparaten Werthe an Zahl $\frac{n-1}{2}$; jeder derselben zieht einen ihm imaginär gepaarten nach sich.

B) Die Vieldeutigkeit des Ausdrucks $\sqrt[n]{(-\alpha)} = \sqrt[n]{\alpha} . \sqrt[n]{(-1)}$ führt sich auf die von $\sqrt[n]{(-1)}$ zurück.

Obgleich der Ausdruck für $\sqrt[n]{(-1)}$ schon ein abgeleiteter $= \sqrt[n]{1} . \sqrt[n]{(-1)}$ ist, verdient er dennoch eine ähnliche Betrachtung als der so eben behandelte $\sqrt[n]{1}$.

Man erhält, für h alle ganzen Zahlen von 0 bis an n setzend, jeden seiner Werthe aus der Formel $\sqrt[n]{(-1)} = \cos \frac{(2h+1)\pi}{n} + \left(\sin \frac{(2h+1)\pi}{n}\right) \sqrt{-1}$, und es ergeben sich daraus nachstehende Sätze.

1. Kein Werth von $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ ist $= 0$ oder dem andern gleich; weil es $= \sqrt[n]{(+\alpha)} . \sqrt[n]{(-1)}$ ist, und für $\sqrt[n]{(+\alpha)}$ der Satz schon feststeht.

2. Kein Werth von $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ kann reell werden, wofern nicht n unpaar ist, und dann gibt es nur einen $= -\sqrt[n]{(+\alpha)}$. Denn es muß alsdann $\sin \frac{(2h+1)\pi}{n} = 0$, also $\frac{(2h+1)\pi}{n} = \pi$,

also $\frac{n-1}{2} = h$ seyn. Für diesen Betrag von h wird
$\sqrt[n]{(-\alpha)} = -\sqrt[n]{(+\alpha)}$.

3. Rein imaginäre Werthe gibt $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ nur, wenn n das Doppelte einer unpaaren Zahl ist, und alsdann deren zwey unter sich gepaarte.

Soll $\cos\frac{(2h+1)\pi}{n} = 0$ seyn, so ist $\frac{(2h+1)\pi}{n}$ entweder $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$, also dessen Sinus entweder $+1$ oder -1, und h entweder $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$ oder $\frac{\frac{3}{2}n-1}{2}$, welches nur stattfinden kann, wenn n die Form $2(2m+1)$ hat.

4. Die imaginären Werthe von $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ sind immer imaginär gepaart, so wie sie in ihrer Reihe von Anfang und Ende gleichweit abstehn.

Sey der eine der hte. Soll ihm ein andrer, der kte, imaginär gepaart seyn, so müssen die Sinus von $\frac{(2h+1)\pi}{n}$ und $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ sich aufheben, ihre Cosinus identisch seyn. Jene Zahlen müssen also 2π ausmachen, mithin $h+k+1=n$, oder $h+k=n-1$, welches bey paarem n in n Fällen möglich ist; bey unpaarem n aber, weil alsdann $h=k=\frac{n-1}{2}$ werden kann, welches den einzigen, nur dadurch möglichen reellen Werth von $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ gibt, in $n-1$ Fällen.

5. Die partiell imaginären Werthe von $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ sind reell gepaart, wenn n gerade ist; keiner von ihnen hingegen, wenn n ungerade seyn sollte.

Sollen von $\frac{(2h+1)\pi}{n}$ und $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ die Sinus identisch, der Cosinus sich aufhebend werden, so muß deren Summe $=\pi$ oder $=3\pi$, mithin $h+k$ entweder $=\frac{n}{2}-1$ oder $=\frac{3n}{2}-1$ seyn. Nur wenn n paar ist, kann beydes geschehn. Die erste Annahme gibt dann $\frac{n}{2}$ verschiedene Voraussetzungen, die zweyte gleichfalls, es gibt also n Fälle, wo sich zu einem Werthe von $\sqrt[n]{(-a)}$ ein reell gepaarter findet, d. h. jeder Werth von $\sqrt[n]{(-a)}$ hat einen solchen unter den übrigen. Wenn jedoch n so beschaffen ist, daß $h=k=\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$ oder $\frac{\frac{3}{2}n-1}{2}$ seyn kann, d. h. wenn n von der Form $2(2m+1)$ ist, so werden für zwey von jenen n Fällen statt reell gepaarter Werthe, rein imaginäre, sich aufhebende (N. 3. B.), erscheinen.

6. Ist n gerade, so gibt es für jeden Werth von $\sqrt[n]{(-a)}$ unter den andern einen zugehörigen, der sich mit ihm aufhebt; ist n unpaar, so ist dies für keinen möglich. Also nur für ein paares n ist $+\sqrt[n]{(-a)}=-\sqrt[n]{(-a)}$.

Damit Sinus sowohl als Cosinus der Zahlen $\frac{(2h+1)\pi}{n}$ und $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ sich aufheben, müssen diese Zahlen um $\pm\pi$ differiren, mithin $h-k=\pm\frac{n}{2}$ oder $h=\pm\frac{n}{2}+k$ betragen, welches nur, wenn n paar ist, stattfinden kann, und alsdann die Glieder der zweyten Hälfte aus der Reihe der Werthe von $\sqrt[n]{(-a)}$, als das Umgekehrte von dem gleichhohen der ersten Hälfte ergibt."

7. Ist n durch 4 theilbar, so enthält $\sqrt[n]{(-\alpha)}$ disparate partiell imaginäre Werthe an Zahl $\frac{n}{4}$; ist es paar, ohne durch 4 theilbar zu seyn, deren an Zahl $\frac{n-2}{4}$. Jeden derselben begleitet ein ihn aufhebender, ein ihm reell und ein ihm imaginär gepaarter. Ist n ungerade, so gibt es solcher Werthe an Zahl $\frac{n-1}{2}$, wovon jeder einen ihm imaginär gepaarten mitbringt.

C) Da $\sqrt[n]{(\pm\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(+\beta)} \cdot \sqrt[n]{(\pm\sqrt{(-1)}}$, so sind auch die Ausdrücke $\sqrt[n]{(+\sqrt{-1})}$ und $\sqrt[n]{(-\sqrt{-1})}$ gewissermaßen so wie $\sqrt[n]{(+1)}$ und $\sqrt[n]{(-1)}$ als fundamental anzusehn.

Da $+\sqrt{-1} = \cos\frac{1}{2}\pi + (\sin\frac{1}{2}\pi)\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1} = \cos\frac{1}{2}\pi - (\sin\frac{1}{2}\pi)\sqrt{-1}$, so ist $\sqrt[n]{(+\sqrt{-1})} = \cos\frac{\pi}{2n} + \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)\sqrt{-1}$ und $\sqrt[n]{(-\sqrt{-1})} = \cos\frac{\pi}{2n} - \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)\sqrt{-1}$.

Die erste dieser Größen mit $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2h\pi}{n} + \left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$, die letzte mit $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}$ multiplicirt, kommt, wenn h und k jede positive ganze Zahl von 0 bis an n bedeutet:

$$\sqrt[n]{(+\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(+\beta)}\left[\cos\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n} + \left(\sin\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

$$\sqrt[n]{(-\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{(+\beta)}\left[\cos\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n} - \left(\sin\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

Alles was über Zahl und Art ihrer Werthe gesagt werden kann, gilt von beyden zugleich.

1. Kein Werth einer solchen Form kann 0 seyn, sie sind alle von einander verschieden, und keiner ist reell. Denn $\frac{(2k + \frac{1}{2})\pi}{n}$, wenn für h alle Werthe von 0 bis an n gesetzt werden, ist immer kleiner als 2π, und sin $\frac{(2k + \frac{1}{2})\pi}{n}$ kann nie 0 werden, da $(2h + \frac{1}{2})$ weder 0 noch n seyn kann.

2. Rein imaginäre Werthe gibt es für jene Formen nur, wenn n unpaar ist, und alsdann nur einen für jede. Alle andern, so wie alle bey paarem n, sind partiell imaginär.

Denn damit $\frac{(2h + \frac{1}{2})\pi}{n} = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ werde, muß entweder $h = \frac{n-1}{4}$ oder $h = \frac{3n-1}{4}$, d. h. entweder n von der Form $4m + 1$, oder der Form $4m + 3$ seyn. Im ersten Falle entsteht als Werth $+\sqrt{-1}$, im letzten $-\sqrt{-1}$, oder umgekehrt.

3. Kein partiell imaginärer Werth solcher Form findet unter den übrigen einen ihm imaginär gepaarten.

Denn, $\overset{1}{h}$ als einen andern Werth von h gedacht, müßten von den Zahlen $\frac{(2\overset{1}{h} + \frac{1}{2})\pi}{n}$ und $\frac{(2h + \frac{1}{2})\pi}{n}$ die Cosinus identisch, die Sinus sich aufhebend seyn, also jene Zahlen zusammen 2π ausmachen, welches unmöglich ist.

4. Nur wenn n unpaar ist, findet sich zu jedem partiell imaginären Werthe jener Formen ein ihm reell gepaarter; bey paarem n gibt es zu keinem einen solchen unter den übrigen.

Denn für diesen Fall müßten die Cosinus obiger Zahlen sich aufheben, die Sinus identisch werden, also ihre Summe $\frac{(2\overset{1}{h} + 2h + 1)\pi}{n} = \pi$ oder 3π, mithin $\overset{1}{h} = \left(\frac{n-1}{2}\right.$ oder $\left.\frac{3n-1}{2}\right) - h$ seyn. Dies ist nur bey unpaarem n, für jedes h, aber nur auf eine Art möglich. Alsdann also wird, nach Absonderung des einzigen rein imaginären, die eine Hälfte der übrigen Werthe, wenn man in jedem das Zeichen des reellen Gliedes umkehrt, die andre geben.

5. Nur wenn n paar ist, hat jeder Werth solcher Formen einen sich mit ihm aufhebenden unter den übrigen; keinen, wenn n unpaar ist. Also nur für paares n ist

$$+\sqrt[n]{(\pm\beta\sqrt{-1})} = -\sqrt[n]{(\pm\beta\sqrt{-1})}.$$

Denn alsdann müssen sich sowohl die Sinus als die Cosinus obiger Zahlen aufheben, was nur, wenn ihre Differenz $\pm\pi$ ausmacht, möglich ist. Es müßte also $\overset{1}{h} - h = \pm\frac{n}{2}$, oder $\overset{1}{h} = \pm\frac{n}{2} + h$ seyn, welches nur wenn n paar ist, und alsdann einmal für jedes h statthaben kann.

6. Disparate partiell imaginäre Werthe enthält $\sqrt[n]{(\pm\beta\sqrt{-1})}$, wenn n paar ist, an Zahl $\frac{n}{2}$; jeder derselben hat einen, der sich gegen ihn aufhebt, zum Begleiter. Für ein unpaares n gibt es $\frac{n-1}{2}$ solche, deren jeder einem ihm reell gepaarten nach sich zieht.

D) Man erhält bekanntlich (S. 203), $\sqrt[n]{(+\alpha\pm\beta\sqrt{-1})}$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left[\cos\frac{2h\pi+\varphi}{n} \pm \left(\sin\frac{2h\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

und $\sqrt[n]{(-\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)} \left[\cos \frac{(2h+1)\pi + \varphi}{n}\right.$
$\left.\mp \left(\sin \frac{(2h+1)\pi + \varphi}{n}\right) \sqrt{-1}\right].$

Die Resultate dieser Regeln lassen sich am kürzesten ableiten, wenn man $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})} = \cos \frac{r\pi + \varphi}{n} \pm \left(\sin \frac{r\pi + \varphi}{n}\right) \sqrt{-1}$ setzt, unter der Bedingung, daß für r die ersten n paaren Zahlen gesetzt werden sollen, wenn α positiv, die ersten n unpaaren hingegen, mit Umkehrung des Zeichens vor dem zweyten Gliede, wenn α negativ ist.

1. Keiner von den einzelnen Werthen eines solchen Ausdrucks kann $= 0$, oder reell, oder rein imaginär werden, sie sind alle, wie die Grundform, woraus sie entstehn, partiell imaginär, und von einander verschieden.

Da φ allemal eine reelle Zahl, kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ bedeutet, so kann $\frac{r\pi + \varphi}{n}$ weder $= \frac{1}{2}\pi$, noch irgend ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ werden, denn setzte man es $= h \cdot \frac{1}{2}\pi$, so folgte $(nh - 2r)\pi = 2\varphi$; d. h. da $2\varphi < \pi$ seyn soll, eine Ungereimtheit. Es kann also weder Cosinus noch Sinus von $\frac{r\pi + \varphi}{n}$ den Werth 0 annehmen; der Ausdruck wird also jederzeit eine partiell imaginäre Form darbieten, und, da $\frac{r\pi + \varphi}{n}$ immer unter 2π bleiben muß (weil r immer kleiner als 2n seyn soll) für jeden andern Werth dieser Zahl (laut S. 178. N. 5.) einen andern Werth für $\cos \frac{r\pi + \varphi}{n} + \left(\sin \frac{r\pi + \varphi}{n}\right) \sqrt{-1}$ mit sich bringen.

2. Nur in dem Falle, wo n eine paare Zahl ist, findet sich zu jedem Werthe von $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$ unter den übrigen

ein ihn aufhebender; ist n unpaar, so kann das Gleiche für keinen statthaben.

Sey der eine Werth $\cos\frac{r\pi+\varphi}{n} \pm \left(\sin\frac{r\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$; der andre $\cos\frac{\overset{1}{r}\pi+\varphi}{n} \pm \left(\sin\frac{\overset{1}{r}\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$. Sollen sie sich aufheben, so müssen $\frac{r\pi+\varphi}{n}$ und $\frac{\overset{1}{r}\pi+\varphi}{n}$ um $\pm\pi$ differiren, also $r-\overset{1}{r}=\pm n$ seyn. Nun aber die Differenz zweyer paaren sowohl als zweyer unpaaren Zahlen jedesmal paar. Dies muß also auch für n stattfinden; bey unpaarem n ist die Voraussetzung unmöglich.

Es mögen übrigens r und $\overset{1}{r}$ von der Form $2h$ und $2\overset{1}{h}$, oder von der Form $2h+1$ und $2\overset{1}{h}+1$ seyn: soll ihre Differenz $2(h-\overset{1}{h})=\pm n$ werden, so ist $h=\pm\frac{n}{2}+\overset{1}{h}$. Da h und $\overset{1}{h}$ positive Zahlen, kleiner als n bedeuten müssen, so darf man, insofern $h=\pm\frac{n}{2}+\overset{1}{h}$ gesetzt wird, für h nur die Werthe von 0 bis an $\frac{n}{2}$ nehmen, deren Zahl selbst $\frac{n}{2}$ ist. Sofern $h=-\frac{n}{2}+\overset{1}{h}$ seyn soll, darf man für $\overset{1}{h}$ alle Werthe von $\frac{n}{2}$ bis an n setzen, deren gleichfalls $\frac{n}{2}$ sind. Alle nach der Grundformel entwickelte Werthe von $\sqrt[n]{(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})}$ bilden eine Reihe, und jedes Glied aus der ersten Hälfte derselben hebt sich mit dem ebensovielsten der zweyten auf, vorausgesetzt, daß n eine paare Zahl ist. Es gilt also nur

für ein paares n auch hier der Satz, daß $+\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$ $= - \sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$.

3. Unter den Werthen von $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$ gibt es weder imaginär gepaarte noch reell gepaarte.

Damit zwey solche Werthe, angedeutet wie in der vorigen Nummer, reell gepaart wären, d. h. gleiche Sinus, aber sich aufhebende Cosinus enthielten, müßten $\frac{r\pi + \varphi}{n}$ und $\frac{\overset{1}{r}\pi + \varphi}{n}$ entweder π oder 3π ausmachen; dieselben könnten nur alsdann imaginär gepaart seyn, wenn jene Cosinus identisch, die Sinus sich aufhebend wären, welches nur eintreten kann, wenn $\frac{r\pi + \varphi}{n}$ und $\frac{\overset{1}{r}\pi + \varphi}{n}$ zusammen 2π betragen.

4. Es sind also für ein unpaares n alle Werthe von $\sqrt[n]{(\alpha \pm \beta \sqrt{-1})}$ disparat; für ein paares n gibt es solcher $\frac{n}{2}$, deren jeder einen, sich gegen ihn aufhebenden, zum Begleiter hat.

Der Fall $\alpha = \beta$ gehört unter C.

Zweyter Abschnitt.

Unter den zusammengesetzten Ausdrücken, in denen sich vieldeutige Radicalgrößen mit einander verflechten, und deren einzelne Werthe entweder bestimmt angegeben, oder doch classificirt werden müssen, sind Summen und Differenzen gleichhoher Wurzeln aus zwey partiell imaginär, sich imaginär gepaarten, Grundformen, $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ von Erheblichkeit, und besonders geeignet, als Proben solcher Betrachtungen zu dienen.

Man muß dabey drey Fälle unterscheiden, je nachdem α und β beyde reell, oder bloß $\alpha = 0$, oder bloß $\beta = 0$ ist.

C) $\sqrt[n]{(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$ gibt, wenn β und α reell sind, nach den Grundregeln entwickelt, vorausgesetzt, daß $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tang}\varphi$, und für die Zeichen h, k, unabhängig von einander, alle ganze Zahlen von 0 bis an n gesetzt werden; und wenn α positiv ist, $\sqrt[n]{(+\alpha + \beta\sqrt{-1})}$

$$+ \sqrt[n]{(+\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \mathrm{I} = \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)} \left[\cos\frac{2h\pi + \varphi}{n} + \cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} + \left(\sin\frac{2h\pi + \varphi}{n} - \sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

Auf gleiche Art entwickelt sich:

$\sqrt[n]{(-\alpha + \beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(-\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \mathrm{II}$, durch:

$$\mathrm{II} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)} \left[\frac{\cos(2h+1)\pi + \varphi}{n} + \frac{\cos(2k+1)\pi + \varphi}{n} + \left(\frac{\sin(2h+1)\pi + \varphi}{n} - \frac{\sin(2k+1)\pi + \varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

Es ist offenbar, daß aus I sowohl als aus II, wenn nach und nach für k und h alle einzelne gestattete Werthe gesetzt werden, eine Anzahl von n . n speciellen Formen hervorgeht, deren Beschaffenheit und Art einen Gegenstand weiterer Untersuchung darbietet.

Es ist rathsam die Ausdrücke für I und II zum Zweck einer solchen noch mehr zusammenzuziehn.

Aus den Fundamentalsätzen für die Sinus und Cosinus von Summen und Differenzen (S. 169) folgt sogleich, wenn man durch Addition oder Subtraction verknüpft, und zugleich $a = \frac{A + B}{2}$, $b = \frac{A - B}{2}$ setzt:

a) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$.

b) $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} . \sin \frac{A-B}{2}$

c) $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$

d) $\cos A - \cos B = - 2 \sin \frac{A+B}{2} . \sin \frac{A-B}{2}$.

Durch Anwendung dieser Sätze erhält man:

I) $\sqrt[n]{(+\alpha+\beta\sqrt{-1})}+\sqrt[n]{(+\alpha-\beta\sqrt{-1})}=2.\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}.$
$\cos\frac{(h+k)\pi+\varphi}{n}.\left[\cos\frac{(h-k)\pi}{n}+\left(\sin\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$

II) $\sqrt[n]{(-\alpha+\beta\sqrt{-1})}+\sqrt[n]{(-\alpha-\beta\sqrt{-1})}=2.\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos.\varphi}\right)}.$
$\cos\frac{(h+k+1)\pi+\varphi}{n}.\left[\cos\frac{(h-k)\pi}{n}+\left(\sin\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$

vorausgesetzt, daß α sowohl als β reell, mithin $\frac{\beta}{\alpha} = \text{tang}\,\varphi$, also φ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, und daß, für h sowohl als k, unabhängig von einander, alle ganze positive Zahlen von 0 bis an n zu setzen sind.

Bey der Forschung über Art und Beschaffenheit der einzelnen, aus I oder II entstehenden Werthe, kommt es bloß auf die beyden letzten Factoren der vorliegenden Ausdrücke an, die unter das Schema $\cos C\,[\cos D + (\sin D)\sqrt{-1}]$ fallen $\left(\text{wo } D \text{ immer } \frac{(h-k)\pi}{n}, \text{ und } C \text{ entweder } \frac{(h+k)\pi+\varphi}{n},\right.$ $\left.\text{oder } \frac{(h+k+1)\pi+\varphi}{n} \text{ bedeutet}\right)$ und dabey hauptsächlich darauf, ob und wann Sinus oder Cosinus von C und D 0 seyn; ob und wann, wofern C oder D (durch Aenderungen von h oder k, indem diese neue Werthe, $\overset{1}{h}$ und $\overset{1}{k}$ an-

nehmen) in neue Zustände $\overset{1}{C}$ und $\overset{1}{D}$ übergehn, Sinus oder Cosinus dieser neuen Zustände denen der anfänglichen gleich, oder sich mit denselben aufhebend werden können. Wir beschränken zunächst diese Untersuchung auf die Annahme, daß $h - k$ positiv ist.

Was alsdann zuerst das Nullwerden betrifft, so ist klar, daß für $D = \frac{(h-k)\pi}{n}$, weil $\frac{h-k}{n}$ immer < 1 ist, $\sin D$ nur 0 seyn kann, wenn $h = k$; $\cos D$ nur wenn $\frac{h-k}{n} = \frac{1}{2}$. Für C hingegen $\left(\text{in einem Falle } \frac{(h+k)\pi + \varphi}{n}, \text{ im andern } \frac{(h+k+1)\pi + \varphi}{n}\right)$ kann weder $\sin C$ noch $\cos C$ Null werden, weil $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ seyn soll.

Ueber Identität oder Sich-Aufheben zwey verschiedener Werthe von D oder C ist Folgendes festzusetzen.

D und $\overset{1}{D}$ sind 0 oder positiv, und unter π. Mithin muß für $\sin \overset{1}{D} = \sin D$, nothwendig $\overset{1}{D} = D$, also $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = h - k$; oder es muß $\overset{1}{D} = \pi - D$, folglich $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = n - (h - k)$ seyn. Dagegen kann $\cos \overset{1}{D} = \cos D$ nur stattfinden, wenn $\overset{1}{D} = D$, also $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = h - k$. Die Annahme $\sin \overset{1}{D} = -\sin D$ ist unmöglich; $\cos \overset{1}{D} = -\cos D$ verlangt $\overset{1}{D} = \pi - D$, also $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = n - (h - k)$.

C und $\overset{1}{C}$ sind von der Art, daß nie ihre Summe π oder ein Vielfaches davon werden kann, übrigens ist jedes derselben positiv und unter 2π. Soll also $\sin \overset{1}{C} = \sin C$ seyn, so ist dies nur möglich, wenn $\overset{1}{C} = C$, d. h. $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = h - k$.

Soll $\cos \overset{1}{C} = \cos C$ seyn, so muß dasselbe stattfinden. Soll aber $\sin \overset{1}{C} = \sin C$ seyn, so muß $\overset{1}{C} - C = \pm \pi$, also $\overset{1}{h} + \overset{1}{k} = \pm n + h + k$ seyn, und nur unter derselben Bedingung ist es möglich, $\cos \overset{1}{C} = - \cos C$ zu setzen.

Auf diese Vorbetrachtungen lassen sich nun sofort folgende Behauptungen über die Werthe, welche unter den Formen I und II enthalten sind, gründen.

1. Unter den $n . n$ Werthen, die aus jeder derselben entstehn, wenn man für h sowohl als k die ganzen Zahlen von 0 bis an n setzt, sind jederzeit n reelle.

Denn für solche muß $\sin \frac{(h-k)\pi}{r} = 0$, also $h = k$ seyn, welches in n Fällen möglich ist.

Ihr Schema ist $2 \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)} \cos \frac{2h\pi + \varphi}{n}$ für I und $2 . \sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos \varphi}\right)} \cos \frac{(2h+1)\pi + \varphi}{n}$ für II. Sie sind sämmtlich reell und verschieden von einander; ist n unpaar, so findet keiner einen unter den andren, der sich mit ihm aufhebt; ist n paar, so gibt es, für jeden, einen unter den andren, der sich mit ihm aufheben muß.

Denn auch die Zahlen, von deren Cosinus hier die Rede ist, sind so beschaffen, daß die Summe von zwey solchen nicht π oder ein Vielfaches von π seyn kann, mithin nur die Möglichkeit bleibt, daß ihre Differenz $= \pm \pi$ seyn könnte. Diese Differenz $\frac{2(\overset{1}{h} - h)\pi}{n} = \pm \pi$ gesetzt, gibt $\overset{1}{h} = \pm \frac{n}{2} + h$, ergibt also für jedes h, aber nur für ein paares n, ein zugehöriges $\overset{1}{h}$. Ist $h < \frac{1}{2} n$, so darf $\overset{1}{h}$ nur

$= h + \frac{1}{2} n$; ist $h > \frac{1}{2} n$, so darf nur $\overset{1}{h} = h - \frac{1}{2} n$ genommen werden. Es ist also in der Totalreihe dieser reellen Werthe für jeden der ersten Hälfte der ebensovielste der zweyten, der sich mit jenem aufhebt. Die übrigen Werthe für I oder II, an Zahl $n^2 - n$, sind alle imaginär; denn keiner von ihnen kann 0 seyn, da sie unter das Schema $\cos C (\cos D + \sin D \sqrt{-1})$ fallen, und weder $\cos A$, noch $\cos D$ und $\sin D$ zugleich, 0 werden können, auch die Fälle, wo $\sin D \sqrt{-1} = 0$ werden kann, schon abgerechnet sind.

2. Rein imaginäre Formen finden nur dann Statt, wenn n paar ist; in diesem Fall gibt es deren an Zahl n, die sich paarweise heben, übrigens verschieden sind.

Sie verlangen $\cos\left(\frac{h-k}{n}\right)\pi = 0$, also $\left(\frac{h-k}{n}\right)\pi = \pm \frac{1}{2}\pi$. Ist $\left(\frac{h-k}{n}\right)\pi = + \frac{1}{2}\pi$, so kommt, als erste Voraussetzung, $h = k + \frac{n}{2}$, und also zu jedem k, von 0 bis an $\frac{n}{2}$, ein zugehöriges h, natürlich nur, wenn n gerade ist. Alsdann wird $-2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left(\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$ für I und $-2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left(\sin\frac{(2k+1)\pi + \varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$ für II, der Ausdruck, in welchem für k alle Zahlen von 0 bis an $\frac{n}{2}$ zu setzen sind, um die einzelnen Werthe zu erhalten. Auf gleiche Art bringt die zweyte Voraussetzung, $\frac{(h-k)\pi}{n} = -\frac{1}{2}\pi$, die Bedingung $h = k - \frac{n}{2}$, also zu jedem k, nicht unter $\frac{n}{2}$, ein zugehöriges h. Die Ausdrücke für I und II bleiben die vorigen, nur mit umgekehrten Zeichen; es gibt also zu jedem ihrer Werthe, wobey $h = k + \frac{n}{2}$, einen, wofür $h = k - \frac{n}{2}$

$\sin D = \sin \overset{1}{D}$, $\cos C = \cos \overset{1}{C}$, und $\cos D = -\cos \overset{1}{D}$, folglich $\overset{1}{h} + \overset{1}{k} = h + k$, und $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = n - h + k$, woraus $\overset{1}{h} = k + \frac{n}{2}$ und $\overset{1}{k} = h - \frac{n}{2}$ folgt. Man wird also für jedes $k < \frac{n}{2}$, und daneben für jedes h nicht $< \frac{1}{2}n$, folglich nur für jeden Werth der ersten Cathegorie (da alsdann $\overset{1}{h}$ nicht $< \frac{1}{2}n$, und $\overset{1}{k}$ immer $< \frac{1}{2}n$ werden muß), einen ihm reell gepaarten in derselben Cathegorie nur dann, wenn n paar ist, erhalten. Für ein unpaares n ist die Voraussetzung nicht denkbar.

d) Wenn n ungerade ist, so gibt es in der ersten Classe keine Werthe, die sich einander aufheben können; ist n gerade, so sind solche allerdings vorhanden, aber nicht jeder Werth der ersten Classe findet in derselben einen andern, sich mit ihm aufhebenden.

Damit sich zwey Werthe aufheben, muß $\cos C \cos D = -\cos \overset{1}{C} . \cos \overset{1}{D}$, und $\cos C \sin D = -\cos \overset{1}{C} . \sin \overset{1}{D}$ seyn. Daraus folgt nothwendig, daß $\cos C = -\cos \overset{1}{C}$ und $\cos D = \cos \overset{1}{D}$ oder daß $\overset{1}{h} + \overset{1}{k} = \pm n + (h + k)$, und $\overset{1}{h} - \overset{1}{k} = h - k$. Aus beyden Sätzen folgt entweder $\overset{1}{h} = \frac{n}{2} + h$ und $\overset{1}{k} = \frac{n}{2} + k$ oder $\overset{1}{h} = h - \frac{n}{2}$ und $\overset{1}{k} = k - \frac{n}{2}$. Bey der ersten Annahme müssen h und k $< \frac{n}{2}$ genommen werden, und geben alsdann jedesmal $\overset{1}{h}$ und $\overset{1}{k}$ nicht $< \frac{n}{2}$. Bey der zweyten sollen h und k jedesmal nicht

$< \frac{n}{2}$ seyn, und geben alsdann $\overset{1}{h}$ und $\overset{1}{k}$ immer $< \frac{n}{2}$. Also nur jeder von den Werthen, die zur ersten Cathegorie gehören, findet unter denen der zweyten Cathegorie einen, womit er sich aufhebt, und umgekehrt. Es versteht sich von selbst, daß der Ansatz nur wenn n eine gerade Zahl ist, überall bestehn kann.

Aus diesen Sätzen kann nun allgemein weiter geschlossen werden:

4) Alle partiell imaginären Werthe der Formen I sowohl als II sind verschieden.

Die der ersten Classe sind es, laut a, unter sich, also auch die der zweyten unter sich, da jede von diesen zu einer der ersten Classe imaginär gepaart ist. Keine der ersten Classe kann einer der zweyten identisch seyn, denn alsdann würde sich für die der ersten Classe in dieser Classe selbst eine imaginär gepaarte finden, gegen b.

5) Ist n ungerade, so hat keiner von den partiell imaginären Werthen von I oder II, unter den übrigen einen reell gepaarten; ist n gerade, so findet dies für jeden Statt.

Für ein ungerades n gibt es keine solche in der ersten Classe, laut c; gäbe es deren in der zweyten, so würde die erste Classe Werthe, die sich aufheben, enthalten müssen, gegen d. Wäre ein Werth der zweyten Classe reell gepaart zu einem der ersten, so müßte diese erste zwey identische Werthe enthalten, gegen a.

Ist aber n gerade, so sind, laut c, für die erste Classe, alle Werthe der letzten Cathegorie einander reell gepaart, also auch für die zweyte Classe sind es die in ihrer letzten Cathegorie unter einander. Jede der ersten Cathegorie hebt sich gegen eine der zweyten Cathegorie in derselben Classe auf (d),

findet aber zugleich jedesmal (4) eine ihr imaginär gepaarte unter denen der andern Classe. Was der einen von zwey partiell imaginären Formen, die sich aufheben, imaginär gepaart ist, muß der andern reell gepaart seyn.

6) Ist n ungerade, so hebt sich keiner der partiell imaginären Werthe für I oder II gegen einen der andern; ist n gerade, so gibt es für jeden einen ihn aufhebenden unter den übrigen.

Dies läßt sich aus den vorigen Sätzen schließen. Gäbe es bey ungeradem n zu irgend einem Werthe einen andern sich gegen ihn aufhebenden, so existirte auch dazu ein imaginär gepaarter, der also zu dem ersten reell gepaart seyn würde, gegen b. Das Umgekehrte läßt sich bey geradem n ebenso nachweisen.

Allgemein und ohne Rücksicht auf den Grad der auszuziehenden Wurzel kann man also den Ausdrücken, welche unter die Form $\sqrt[n]{(\pm\alpha+\beta\sqrt{-1})}+\sqrt[n]{(\pm\alpha-\beta\sqrt{-1})}$ gehören, nur behaupten, daß sie eine Anzahl von n . n unter einander verschiedenen Werthen, wovon keiner $=0$ ist, befassen; daß darunter jedesmal n reelle, die übrigen n^2-n imaginär sind, und daß jeder imaginäre unter den andern einen imaginär gepaarten finden muß. Ist n gerade, so gibt es n rein imaginäre; jeder nicht rein imaginäre findet einen ihm reell gepaarten, auch einen sich mit ihm aufhebenden, unter den übrigen. Ist n ungerade, so gibt es keine rein imaginären, keine sich gepaarten, keine sich aufhebenden Werthe unter denen, die sich aus jenen Ausdrücken entwickeln; es werden also unter den partiell imaginären der Zahl nach $\frac{n^2-n}{2}$ gänzlich disparate befindlich seyn, deren jeder einen imaginär gepaarten nach sich zieht, wenn n unpaar ist. Bey einem paaren n werden unter den partiell

imaginären Werthen $\frac{n^2-2n}{4}$ disparate seyn, deren jeder einen reell, einen imaginär gepaarten, und einen sich mit ihm aufhebenden zum Begleiter hat.

F) Die Form $\sqrt[n]{(\pm\alpha+\beta\sqrt{-1})}-\sqrt[n]{(\pm\alpha-\beta\sqrt{-1})}$, hat große Aehnlichkeit mit der vorigen, und die geringe Beträchtlichkeit der Modificationen, deren die Theorie jener und die bey ihr gebrauchten Principien, bedürfen, um sofort auf die vorliegende angewendet zu werden, rechtfertigt es, daß nur die Resultate ihrer Entwicklung hier aufgestellt werden.

Ist $III=\sqrt[n]{(+\alpha+\beta\sqrt{-1})}-\sqrt[n]{(+\alpha-\beta\sqrt{-1})}$, so wird:

$$III=\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left[\cos\frac{2h\pi+\varphi}{n}-\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+\left(\sin\frac{2h\pi+\varphi}{n}+\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

oder zusammengezogen

$$III=\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\cdot\sin\frac{(h+k)\pi+\varphi}{n}\left[-\sin\frac{(h-k)\pi}{n}+\left(\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Und eben so für $\sqrt[n]{(-\alpha+\beta\sqrt{-1})}-\sqrt[n]{(-\alpha-\beta\sqrt{-1})}=IV$.

$$IV=\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left[\cos\frac{(2h+1)\pi+\varphi}{n}-\cos\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{n}-\left(\sin\frac{(2h+1)\pi+\varphi}{n}+\sin\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

oder

$$IV=-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\cdot\sin\frac{(h+k+1)\pi+\varphi}{n}\left[\sin\frac{(h-k)\pi}{n}+\left(\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Daraus leiten sich in Beziehung auf die einzelnen Werthe, die diesen Ausdrücken zu Theil werden können, folgende Sätze, correspondirend mit denen, auf die unmittelbar vorhin betrachteten I und II Beziehung habenden, ab.

1. Unter den n . n Werthen der Ausdrücke III oder IV gibt es keine reelle, sobald n ungerade, aber allerdings deren n, sobald n gerade ist, die alsdann verschieden sind, aber sich paarweise aufheben. Alle sonstige sind imaginär.

Wenn solche existiren, so fallen sie unter das Schema:

$$2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1} \text{ für III und}$$

$$2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1} \text{ für IV, wo}$$

für k alle ganze Zahlen von 0 bis an n genommen werden dürfen. Der kte und der $\frac{1}{2}n+$kte heben sich gegeneinander.

2. Rein imaginäre Formen finden sich für III wie für IV jedesmal, an Zahl n, alle verschieden, und nur dann sich paarweise hebend, wenn n eine gerade Zahl ist.

Ihr Schema ist $2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\left(\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$ für III, und $-2\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)}\cdot\left(\sin\frac{(2k+1)\pi+\varphi}{n}\right)\sqrt{-1}$ für IV, wobey, wenn n paar ist, der kte, und der $\frac{1}{2}n+$kte sich jedesmal heben.

3. Partiell imaginäre Werthe von III oder IV finden jeder einen imaginär sich mit ihm aufhebenden, nur wenn n gerade, unter den übrigen; keiner einen solchen, sobald n ungerade ist.

4. Alle partiell imaginäre Werthe von III oder IV sind verschieden von einander.

5. Jeder partiell imaginäre Werth von III oder IV findet unter den übrigen einen reell gepaarten.

6. Nur wenn n gerade ist, gibt es für jeden partiell imaginären Werth von III oder IV unter den übrigen einen sich mit ihm aufhebenden; ist n ungerade, so findet sich für keinen ein solcher unter den andern.

Ueber die Ausdrücke von der Form $\sqrt[n]{(\pm\alpha+\beta\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\pm\alpha-\beta\sqrt{-1})}$ ist dem gemäß, allgemein und ohne Rücksicht auf n, nur Folgendes zu behaupten gestattet.

Sie enthalten unter sich eine Anzahl von n . n Werthen, keine $=0$; alle verschieden; n davon sind rein imaginär, und es gibt zu jedem partiell imaginären Werthe einen reell gepaarten unten den übrigen.

Uebrigens geben sie, wenn n gerade ist, n reelle Werthe, und überhaupt für jeden der übrigen einen imaginär gepaarten, so wie einen sich mit ihm aufhebenden. Ist hingegen n ungerade, so gibt es weder imaginär gepaarte, noch sich aufhebende Werthe unter denen, die aus jenen Ausdrücken entspringen. Es verhält sich also mit der Zahl der disparaten Werthe wie im vorigen Fall, nur daß hier für ein unpaares n jeder partiell imaginäre Werth einen reell gepaarten mit sich bringt.

Es ist nicht unwichtig, zwischen den beyden Ausdrücken:

$\mathfrak{E} = \sqrt[n]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$ und

$\mathfrak{F} = \sqrt[n]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$ eine Vergleichung anzustellen, das heißt, sofern man sie als vieldeutige betrachtet, nach Beziehungen zwischen den einzelnen Werthen des ersten und denen des zweyten zu forschen.

Hier zeigt sich denn sofort Nachfolgendes:

1. Ist n eine paare Zahl, so geben die Ausdrücke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ im Allgemeinen vollkommen Identisches; das heißt, jeder

einzelne Werth, welcher aus dem ersten hervortritt, entspringt auch aus dem zweyten, und umgekehrt.

Dies folgt von selbst aus dem im ersten Abschnitt dieses Anhangs dargethanen Satze: daß, sobald n paar ist, jederzeit, was auch unter dem Wurzelzeichen stehn möge, $+\sqrt[n]{} = -\sqrt[n]{}$ seyn muß.

2. Ist n eine unpaare Zahl, so wird, den Fall $\alpha = \beta$ ausgenommen *), kein Werth des Ausdruckes E, einem des correspondirenden F, gleich, oder sich mit demselben aufhebend, und ebenso keiner des ersten irgend einem des andern reell oder imaginär gepaart.

Denn das allgemeine Schema aller Werthe, die aus E entspringen, ist, unter h und k beliebige ganze Zahlen von 0 bis an n verstanden, $\cos A\, [\cos B + (\sin B) \sqrt{-1}]$, wobey A und B Zahlen sind, in denen h und k enthalten ist. Ebenso ist, unter $\overset{1}{h}$ und $\overset{1}{k}$ Aehnliches wie unter h und k, unter $\overset{1}{A}$ und $\overset{1}{B}$ Aehnliches wie unter A und B gedacht, das Schema aller aus F entstehenden Werthe, $\sin \overset{1}{A}\, [-\sin \overset{1}{B} + (\cos \overset{1}{B}) \sqrt{-1}]$. Soll irgend ein Werth aus E einem aus F gleich; einem solchen reell oder imaginär gepaart, sich mit demselben aufhebend seyn, so muß:

$$\cos A \,.\, \cos B = \pm \sin \overset{1}{A} \,.\, \sin \overset{1}{B} \text{ und}$$

$$\cos A \,.\, \sin B = \pm \sin \overset{1}{A} \,.\, \cos \overset{1}{B}$$

gesetzt werden können, also auf beyden Seiten quadrirt, addirt, und $\sqrt{}$ gezogen, $\cos A = \pm \sin \overset{1}{A}$ seyn. Es müssen

*) Dieser gehört ohnehin, da $\alpha + \alpha \sqrt{-1} = \alpha (1 \pm \sqrt{-1}) = \alpha \sqrt{(\pm 2 \sqrt{-1})}$, einer anderen einfacheren Classe von Formen an.

also $\overset{1}{A}$ und A um $(2r+1)\frac{1}{2}\pi$ differiren, oder dies zusammen ausmachen. Daß ihre Summe nicht ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ seyn kann, wenn α und β bestimmte Zahlen, also φ reell und $< \frac{1}{2}\pi$ ist, versteht sich von selbst, wobey jedoch der einzige Fall $\alpha = \beta$, für welchen $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ wird, als Ausnahme bemerklich gemacht werden muß. Ihre Differenz, welche sowohl für E als für F, $\frac{[\overset{1}{h}+\overset{1}{k}-(h+k)]\pi}{n}$, also $< 2\pi$ ist, $= \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ zu setzen, wird unmöglich, sobald n eine ungerade Zahl seyn soll.

Es stellen diesem gemäß die beyden Ausdrücke $\sqrt[n]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$, und $\sqrt[n]{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$, worin α und β reelle Zahlen, nach Belieben positiv oder negativ seyn mögen, zwey vieldeutige Formen vor, aus deren jeder eine Anzahl von n . n einzelnen Werthen entwickelt werden kann, und sind insofern als allgemeine Glieder von Reihen zu betrachten, deren jede n . n einzelne Glieder in sich faßt. Ist nun n eine paare Zahl, so gibt der eine von ihnen identisch dieselben einzelnen Werthe wie der andre, wenn schon in andrer Folge. Ist hingegen n unpaar, so sind alle einzelnen Werthe des ersten Ausdrucks allen denen des zweyten vollkommen disparat, so daß weder Identität, noch gänzliches Sich-Aufheben, weder Reelles-, noch Imaginäres-Gepaartseyn unter denselben Statt finden kann. Diese Regel gilt unbedingt, sobald α und β verschieden sind. Ihr erster Theil bleibt auch für $\alpha = \beta$ richtig, und nur ihr zweyter würde in diesem Falle einige Modificationen zu erleiden haben. Unfehlbar ist eine Beziehung dieser Art als höchst merkwürdig zu betrachten.

Der zweyte Hauptfall, welcher bey Summen und Differenzen gleich hoher Wurzeln aus den Formen $\alpha+\beta\sqrt{-1}$

und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ vorkommen kann, wo $\beta = 0$ gesetzt wird, verdient, weil sich bey ihm die einfachsten Formen darbieten, unter denen vieldeutige Radicalgrößen zusammentreten, $\overline{\sqrt[n]{\alpha}} + \overline{\sqrt[n]{\alpha}}$ und $\overline{\sqrt[n]{\alpha}} - \overline{\sqrt[n]{\alpha}}$, eine besondre Betrachtung. Sie kommt zum Theil auf diejenige zurück, welche bey den unmittelbar vorangehenden Ausdrücken gebraucht ist.

Man könnte auch hier unterscheiden, je nachdem α positiv oder negativ seyn soll. Indessen genügt es vollkommen, nur die erste Annahme zu entwickeln, wobey α positiv ist, da eine leichte Betrachtung zeigt, daß alle Resultate für $+\alpha$, sich zu denen für $-\alpha$ ganz so verhalten müssen, wie unter gleichen Umständen bey dem ersten Hauptfalle die Resultate von I zu denen von II.

G) Der Ausdruck $\overline{\sqrt[n]{\alpha}} + \overline{\sqrt[n]{\alpha}}$ wird sofort:

$$\sqrt[n]{\alpha}\left[\cos\frac{2h\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n} + \left(\sin\frac{2h\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right],$$

und dieser $2\sqrt[n]{\alpha}\cdot\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\cdot\left[\cos\frac{(h+k)\pi}{n}\right.$ $\left.+\left(\sin\frac{(h+k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right] = \overline{\sqrt[n]{\alpha}} + \overline{\sqrt[n]{\alpha}}$.

Diese Regel lehrt sogleich unmittelbar:

1. Für die Fälle, wo $h - k = 0$, d. h. $k = h$, deren also n sind, wird $\overline{\sqrt[n]{\alpha}} + \overline{\sqrt[n]{\alpha}} = 2\sqrt[n]{\alpha}\left[\cos\frac{2h\pi}{n}\right.$ $\left.+\left(\sin\frac{2h\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right] = 2\overline{\sqrt[n]{\alpha}}$, und kein Werth dieser ersten Gattung kommt unter denen der zweyten, für die nicht $h = k$ ist, nochmals, oder unter diesen ein ihn aufhebender, ein ihm reell oder imaginär gepaarter vor.

Er selbst sey durch $2\sqrt[n]{\alpha}\,[\cos A + (\sin A)\sqrt{-1}]$ angedeutet. Jeder der zweyten Gattung wird alsdann durch $2\sqrt[n]{\alpha}\,.\cos C\,(\cos D$

$+ \sin D . \sqrt{-1}$) repräsentirt werden können. Sollte nun $\cos A = \pm \cos C \cos D$, und zugleich $\sin A = \pm \cos C . \sin D$ seyn, so müßte $\cos A^2 + \sin A^2 = (\cos C)^2 [(\cos D)^2 + (\sin D)^2]$, also $(\cos C)^2 = 1$, also $\cos C = \pm 1$ seyn, also entweder $C = 0$, oder $C = \pi$ seyn. Das Erste gibt $h = k$, das Zweyte ist nicht möglich, da $h - k < n$.

Uebrigens sind die Werthe dieser ersten Gattung, deren jeder überhaupt nur einmal vorkommen, und nie $= 0$ werden kann, aus früherer Untersuchung für $\mathfrak{A}$, (S. 364), bekannt.

2. Jeder, zu der zweyten Gattung gehörige, Werth von $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\alpha}$ muß zweymal erscheinen; während jeder der ersten nur einmal vorhanden ist.

Denn, wofern $h - k$ nicht 0 seyn soll, so gibt es die eine Hälfte der alsdann möglichen Werthe, wenn es positiv, die andre (indem sich h und k verwechseln), wenn es negativ ist. Aber in der Formel für $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\alpha}$ gibt die Verwechslung von h und k identisch Dasselbe wieder.

3. Jeder imaginäre zur zweyten Gattung gehörige Werth von $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\alpha}$ hat unter den übrigen derselben Gattung einen imaginär gepaarten.

Setzt man in der Formel statt h und k, an die Stelle $-h$ und $-k$, so erhält man $2\sqrt[n]{\alpha} . \cos \frac{(h-k)\pi}{n} \left[\cos \frac{(h+k)\pi}{n} - \left(\sin \frac{h+k}{n}\right) \sqrt{-1}\right]$, welches das allgemeine Schema der zu den Werthen der anfänglichen Formel imaginär gepaarten ist.

4. Unter dem Ausdruck $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\alpha}$ sind jederzeit n reelle Werthe enthalten, deren allgemeines Schema $2\sqrt[n]{\alpha} . \cos \frac{2h\pi}{n}$

ist. Für die Fälle, wo n durch 4 theilbar ist, werden zwey dieser Werthe $=0$, die übrigen $n-2$ bleiben reell. Ist n ungerade, so kann nur einer, ist es gerade, so werden zwey derselben zu der ersten Gattung und die übrigen zu der zweyten gehören.

5. Ist n eine paare Zahl, so gibt es n Fälle, in welchen $\sqrt[n]{\alpha}+\sqrt[n]{\alpha}=0$ wird, sie gehören alle der zweyten Gattung; $n-2$ Fälle, in denen es rein imaginäre Werthe bekommt, enthalten unter dem Schema $2\sqrt[n]{\alpha}\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$ (mit Weglassung der beyden Werthe desselben, die für $k=0$, und $k=\frac{1}{2}n$, selbst 0 werden). Auch die letzteren gehören alle der zweyten Gattung, und nur für den Fall, wo n durch 4 theilbar ist, gehn zwey davon zu denen der ersten über, so daß nur $n-4$ alsdann von der zweyten bleiben.

6. Jede partiell imaginäre Form, die unter $\sqrt[n]{\alpha}+\sqrt[n]{\alpha}$ enthalten ist, findet eine sich mit ihr aufhebende, und eine ihr reell gepaarte unter den übrigen, wenn n paar seyn soll; ist hingegen n unpaar, so ergeben sich für $\sqrt[n]{\alpha}+\sqrt[n]{\alpha}$ weder 0 werdende noch rein imaginäre, noch reell gepaarte, noch sich aufhebende Werthe. Der Beweis ist dem für ähnliche Sätze bey F geführten ganz gleichartig.

7. Die Werthe der ersten Gattung zu classifiziren, ist hier ganz überflüssig. Die der zweyten bieten für ein paares, nicht durch 4 theilbares n, eine Zahl von $\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ disparaten, partiell imaginären Werthen, für ein durch 4 theilbares n, von $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^2+1\right]$ dar, deren jeder einen identischen, einen sich mit ihm selbst aufhebenden, einen reell, und einen imaginär gepaarten zum Begleiter hat.

Bey einem unpaaren n gibt es von der zweyten Gattung eine Zahl von $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ disparaten partiell imaginären Werthen, deren jeder einen imaginär gepaarten mitbringt, und sammt diesem zweymal erscheint.

H) Der Ausdruck $\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\alpha}$ gibt, entwickelt:

$$\sqrt[n]{\alpha}\left[\cos\frac{2h\pi}{n} - \cos\frac{2k\pi}{n} + \left(\sin\frac{2h\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

oder umgeformt

$$2\sqrt[n]{\alpha}.\sin\frac{(h-k)\pi}{n}\left[-\sin\frac{(h+k)\pi}{n} + \left(\cos\frac{(h+k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

$$= \sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\alpha}.$$

Daraus erhellet sogleich für $\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\alpha}$:

1. Es gibt jedesmal n Werthe, deren jeder $= 0$.

Denn es gibt n Fälle, wo $h - k = 0 = \sin\frac{(h-k)\pi}{n}$.

2. Es gibt zu jedem nicht 0 seyenden Werth einen ihn aufhebenden.

Denn die Verwechslung von h und k ändert nichts als das Zeichen des Ausdrucks.

3. Es gibt zu jedem imaginären Werthe einen imaginär gepaarten.

Denn, statt k und h gesetzt $-k$ und $-h$, wird:

$$2\sqrt[n]{\alpha}.\sin\frac{(h-k)\pi}{n}\left[-\sin\frac{(h+k)\pi}{n} - \left(\cos\frac{(h+k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

$$= \sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\alpha}.$$

4. Es gibt zu jedem partiell imaginären Werthe einen reell gepaarten.

Denn bloß statt k gesetzt $-k$, gibt die erste Formel:

$$2\sqrt[n]{\alpha}.\sin\frac{(h+k)\pi}{n}\left[-\sin\frac{(h-k)\pi}{n} + \left(\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

Die Verwechslung von h und k in dieser Formel gibt:

$$2\sqrt[n]{\alpha}.\sin\frac{(h+k)\pi}{n}\left[+\sin\frac{(h-k)\pi}{n}+\left(\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

welches das allgemeine Schema aller Werthe, die denen des anfänglichen reell gepaart sind, darstellt.

5. Kein Werth kann doppelt erscheinen, sobald n unpaar ist.

Dies geht aus leichten Schlüssen, ganz ähnlich denen, wodurch ein gleichlautender Satz für E (S. 383. Nr. a) bewiesen worden, sogleich hervor.

6. Für ein unpaares n gibt $\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\alpha}$ durchaus keinen reellen Werth, hingegen in der That rein imaginäre Werthe, unter dem allgemeinen Schema $2\sqrt[n]{\alpha}\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$. Ihrer werden (da der eine für $k=0$, $0\sqrt{-1}$, also selbst 0 wird) an Zahl $n-1$ seyn, keiner dem andern gleich, aber gepaart.

Uebrigens gilt, auf gleichem Beweise ruhend, auch für die beyden Ausdrücke $\sqrt[n]{\alpha}+\sqrt[n]{\alpha}$, und $\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt[n]{\alpha}$ die merkwürdige Beziehung, daß sie jedesmal identisch dieselben einzelnen Werthe darbieten, sobald n gerade ist, hingegen alle Werthe des ersten Ausdrucks denen des zweyten vollkommen disparat sind, sobald n ungerade seyn soll. Es ist also nur nöthig, von den Werthen des $\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt[n]{\alpha}$ für ein unpaares n zu reden. Dieses enthält deren $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ disparate partiell imaginäre, deren jeder einen reell gepaarten, einen imaginär gepaarten, einen sich mit ihm aufhebenden zum Begleiter hat, aber nur einmal erscheint. Setzt man in den beyden letzten Ausdrücken $\alpha=1$, so erhält man Theoreme für $\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{1}-\sqrt[n]{1}$,

die sich an diejenigen für $\sqrt[n]{1} \cdot \sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{1} : \sqrt[n]{1}$, welche als Fundamentalsätze zum Behuf des Rechnens mit Potenzen gebrochner Exponenten unentbehrlich sind, ergänzend anschließen.

Der dritte Hauptfall, welcher die zur Untersuchung aufgenommene zusammengesetzte Radicalgröße gestattet, wobey $\alpha = 0$ ist, erledigt sich durch nachstehende Formeln.

$$\text{I)}\ \sqrt[n]{(+\beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(-\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\beta} \cdot \left[\cos\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n} + \cos\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n} + \left(\sin\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n} - \sin\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

oder zusammengezogen:

$$\sqrt[n]{(+\beta\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(-\beta\sqrt{-1})} = 2\sqrt[n]{\beta} \cdot \cos\frac{(h+k+\frac{1}{2})\pi}{n} \left[\cos\frac{(h-k)\pi}{n} + \left(\sin\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Und auf gleiche Art:

$$\text{K)}\ \sqrt[n]{(+\beta\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(-\beta\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{\beta} \left[\cos\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n} - \cos\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n} + \left(\sin\frac{(2h+\frac{1}{2})\pi}{n} + \sin\frac{(2k+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right]$$

zusammengezogen:

$$\sqrt[n]{(+\beta\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(-\beta\sqrt{-1})} = 2\sqrt[n]{\beta} \cdot \sin\frac{(h+k+\frac{1}{2})\pi}{n} \left[-\sin\frac{(h-k)\pi}{n} + \left(\cos\frac{(h-k)\pi}{n}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Da er weniger Interesse besitzt, so mögen seine Resultate, ohnehin denen des ersten Falls, so wie dessen Ausdrücke den seinigen, ganz ähnlich, hier nicht weiter entwickelt werden.

Untersuchungen, wie die bisherigen, lassen sich über Ausdrücke, von den Gestalten $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ und $\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B}$, auch dann anstellen, wenn A und B identische, oder sich aufhebende, oder reell gepaarte Formen der Art $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ sind. Der merkwürdige Satz von der Identität jener beyden Ausdrücke, sobald n eine paare Zahl ist, und dem gänzlichen Disparatseyn ihrer Werthe, wenn n eine unpaare Zahl seyn soll, würde bey jeder der genannten Annahme für A und B wiederkehren.

Es würden sich übrigens die Classificationen der Werthe von der Form $a + b \sqrt{-1}$ noch weiter treiben, und namentlich unter den disparaten diejenigen, wobey sich a und b, unangesehn ihres Zeichens, verwechselt hätten, ferner unterscheiden, dadurch also die Zahl der ursprünglich auszumittelnden Werthe vieldeutiger Ausdrücke noch anderweitig vermindern lassen.

Druckfehler.

S. 36. Z. 5. st. b^n l. $\overset{n}{b}$
— 42. — 10 v. u. st. Divisors l. Dividend; Z. 8 v. u. st. grat l. gat
Z. 6 v. u. st. ^bC l. ^1C
— 59. — 11. st. b l. x; Z. 17. st. $\overset{2}{A}x^{n-1}\ldots+\overset{r-1}{A}x^{n+1(r-1)}\ldots+\overset{1}{A}x^{n-r}$
l. $\overset{2}{A}x^{n-2}\ldots+\overset{r-1}{A}x^{n-(r-1)}+\overset{r}{A}x^{n-r}\ldots$
— 76. — 7. st. u^n l. u^r
— 80. — 1. st. C l. $\overset{h}{C}$
— 83. — 9. ist die erste ( ) um Σ, und Z. 13. das (vor Σ überflüssig
— 86. — 5 v. u. st. $\overset{r}{(a)}$ l. $\overset{k}{(a)}$
— 92. — 10 v. u. st. x^2 l. x^r
— 95. — 3. st. $\overset{0}{a}$ l. $\overset{2}{a}$
— 101. — 8 v. u. st. $\sqrt[m]{}$ l. $\sqrt[n]{}$
— 106. — 4. st. x^r l. x^{r-1}
— 116. — 8 v. u., und Z. 4 v. u. st. $(-r)$ l. (-1). Die Anfangsbuchstaben der 3 letzten Zeilen sind verwechselt.
— 130. — 14. st. 𝔄 l. $\overset{1}{𝔄}$ und Z. 17. st. $\overset{r-1}{a}$ l. $\overset{r}{a}$
— 136. — 2. st. x^{r-1} l. x^r
— 137. — 15. st. $\overset{2}{a}x$ l. $\overset{2}{a}x^2$ und Z. 1 v. u. st. rA l. $r\overset{r}{A}$
— 138. — 2. st. $\overset{1}{a}x^2$ l. $\overset{2}{a}x^2$, und Z. 3 v. u. st. na l. bina
— 148. — 11. und 150. Z. 6 v. u. st. $\frac{f}{1-f}$ l. $\frac{1}{1-f}$
— 170. — 8 v. u. st. $n-2_r$ l. $n-2r$ und Z. 9 v. u. st. $\overset{\blacksquare}{\mathfrak{B}}$ l. $\overset{2}{\mathfrak{B}}$
— 174. — 13. st. 1 und Z. 9 v. u. st. a l. 0
— 175. — 8 v. u. st. $\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)^r$ l. $\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)^r$
— 186. — 4. st. Cosinus l. Sinus
— 191. — 3 v. u. st. β l. B
— 193. — 1. st. $\sqrt{-.}$ l. $\sqrt{-1}$
— 209. — 1 v. u. st. $2h\pi$ l. $2k\pi$
— 210. — 7 v. u. st. ν l. r
— 211. — 4. ist vor „Das" einzuschalten $\frac{(k-f)\,\varrho\,2\pi\sqrt{-1}}{\nu}$
— 221. — 5. st. a l. A
— 225. — 5. st. f l. f; und Z. 6. st. ns l. $\nu\sigma$
— 236. — 6 v. u. st. α l. a

S. 244. Z. 9 v. u. st. $\alpha + a^{\delta}$ l. $\alpha + 2^{\delta}$

— 249. — 10. st. $\overset{1}{\mathfrak{Z}}$ und $\overset{3}{\mathfrak{Z}}$ l. $\overset{r}{\mathfrak{Z}}$

— 271. — 10. st. X l. ^{f}X

— 326. — 17. st. 228 l. 227

— 335. — 4 v. u. st. $1 + ax$ l. ax

— 340. — 8 v. u. st. rte l. nte

— 347. — 13. st. u.. l. n. 6. S. 158.

— 359. — 8 v. u. gehört hinter φ und ψ ein ;

— 368. — 6 v. u. st. n l. $\overline{n}$

Der Vollständigkeit wegen mögen auch noch folgende, obschon sie sich, auch ohne Anzeige, auf den ersten Blick bemerklich machen, und verbessern, hinzugefügt werden.

Die Indices 1 und r über den Coeffizienten sind einigemale undeutlich oder verwechselt: S. 46. Z. 4.; S. 105. Z. 9.; S. 123. Z. 5 v. u.; S. 131. Z. 4; S. 235. Z. 13 und 15.; S. 237. Z. 5 und 6, auch 6 und 7 v. u.; S. 240. Z. 1.

Das Zeichen des Potenz-Exponenten hat sich herunter geschoben: S. 78. Z. 1 und 8.; 79. Z. 17.; 84. Z. 5 v. u.; 116. Z. 4 v. u.; 119. Z. 11.; 125. Z. 1.; 126. Z. 10 v. u.; 129. Z. 8 v. u. Dagegen steht S. 114. Z. 1., $(x-2)$; und S. 125. Z. 2., x^{r} etwas zu hoch.

Zum ersten Male S. 121., und von da an noch hin und wieder, ist bey dem Andeuten der Permutationszahlen der wiederholte Punkt vor den letzten Factoren ausgeblieben, also z. E. $1.2.n$ statt $1.2..n$ gesetzt.

Endlich S. 6. Z. 19. st. das l. des; S. 10. Z. 10 v. u. st. Cor l. Coor; S. 119. Z. 4. st. wie l. wie sie; S. 127. Z. 4 v. u. st. mag l. man; S. 141. Z. 3. st. der l. den; S. 150. Z. 14. st. ve l. re; S. 173. Z. 6 v. u. st. jede l. jeder; S. 300. Z. 8. st. Permusiren l. Permutiren; S. 321. Z. 1 v. u. st. ain l. in; S. 327. Z. 13 v. u. st. Voraus l. Ver.

JW

